UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

TATIANA TORTATO DALARMI

UMA ANÁLISE DO PENSAMENTO EGÍPCIO NOS PROBLEMAS 24, 25, 26, 27 E 34 DO PAPIRO DE RHIND

CURITIBA

2019

TATIANA TORTATO DALARMI

UMA ANÁLISE DO PENSAMENTO EGÍPCIO NOS PROBLEMAS 24, 25, 26, 27 E 34 DO PAPIRO DE RHIND

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Luis Trovon de Carvalho

CURITIBA

2019

Catalogação na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

D136a Dalarmi, Tatiana Tortato
Uma análise do pensamento egípcio nos problemas 24, 25, 26, 27 e 34 do papiro de Rhind [recurso eletrônico] /Tatiana Tortato Dalarmi. – Curitiba, 2019.

Dissertação – Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2019.

Orientador: Alexandre Luis Trovon de Carvalho.

1. Matemática - Historiografia. 2. Matemática antiga. 3. Manuscritos (Papiros). 4. Matemática - Estudo e ensino. I. Universidade Federal do Paraná. II. Carvalho, Alexandre Luis Trovon de. III. Título.

CDD: 510

Bibliotecária: Vanusa Maciel CRB- 9/1928

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - 31075010001P2

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de **TATIANA TORTATO DALARMI** intitulada: **Uma Análise do Pensamento Egípcio nos Problemas 24, 25, 26, 27 e 34 do Papiro de Rhind**, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 18 de Dezembro de 2019.

ALEXANDRE LUIS TROVON DE CARVALHO
Presidente da Banca Examinadora (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

LIGIA NEGRI
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARNÁ)

Ana Cristina Munaretto
ANA CRISTINA CORREA MUNARETTO
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ)

Dedico esse trabalho aos meus filhos Rômulo e Cecília e ao meu esposo Adélcio, fontes de luz para os meus dias, que estiveram ao meu lado em todos os momentos e me incentivaram nessa conquista, o meu amor e a minha gratidão.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pelo dom da vida e por me permitir estar aberta a novas experiências.

Agradeço ao meu marido, aos meus filhos e familiares pelo incentivo, mesmo quando pensei em desistir, e pela paciência nos momentos de ausência.

Agradeço ao meu orientador, Professor Dr. Alexandre Luiz Trovon de Carvalho, por todas as suas contribuições e por me contagiar ainda mais com seu fascínio pela matemática, tão expresso em suas aulas e orientações.

Agradeço a todos os professores e colegas do PROFMAT que com trocas de conhecimentos tornaram o curso mais produtivo e prazeroso.

Agradeço a todos que de alguma forma colaboraram para que esse trabalho se realizasse.

RESUMO

Este trabalho apresenta a análise de alguns problemas de '*aha*' quantidade encontrados no Papiro Rhind. Para isso situamos a época e as circunstâncias em que os problemas do Papiro Rhind foram escritos, considerando artefatos históricos relevantes à investigação. A observação de propriedades matemáticas mais gerais, presentes nos três papiros matemáticos mais importantes, permitiu colher material para uma descrição mais detalhada de nosso objeto de análise. De início, apesentamos o sistema de numeração inteira e fracionária, e a forma peculiar pela qual eram efetuadas as operações de multiplicação e divisão. Somado a isso, tentamos uma reconstrução do processo de divisões fracionárias, por meio do método de Fibonacci. Esse arcabouço histórico-matemático nos permitiu analisar o método da falsa posição, utilizado pelo escriba do Papiro de Rhind, para solução de equações lineares. Tendo em conta que a história da matemática pode representar um contexto significativo no processo de ensino e aprendizagem, localizamos possíveis pontos de inserção do pensamento matemático egípcio em conteúdos trabalhados em sala de aula. Trazemos também para a discussão a forma pela qual alguns livros didáticos abordam o sistema egípcio de numeração.

Palavras-chave: História da Matemática. Papiro de Rhind. Problemas *Aha*. Equações Lineares. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

This work presents an analysis of some '*aha*' quantity problems found in Rhind Papyrus. For this we situate the time and circumstances in which Rhind Papyrus problems were written, taking into account historical artifacts relevant to our investigation. The observation of more general mathematical properties, present in the three most important mathematical papyruses, allowed us to gather material for a more detailed description of our object of analysis. At first, we present the whole and fraction numbering system, and the peculiar way in which multiplication and division operations were performed. In addition, we attempted a reconstruction of the process of fraction divisions by means of Fibonacci method. This historical-mathematical framework allowed us to analyze the false position method used by Rhind's Papyrus scribe to solve linear equations. Given that the history of mathematics can represent a significant context in the process of teaching and learning, we have located possible points of insertion of Egyptian mathematical thinking in classroom content. We also bring to the discussion how some textbooks approach Egyptian numbering system.

Keywords: History of Mathematics. Rhind's papyrus. *Aha* problems. Linear equations. Teaching of Mathematics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A história é algo que me fascina e a história da matemática possibilita a visão sobre a natureza do conhecimento matemático e de algumas particularidades. Contribui para a elaboração de atividades significativas para o ensino, promove a visão da matemática como uma atividade humana e cultural, proporcionando o gosto para o estudo. Esse talvez tenha sido o principal aspecto que me motivou a trabalhar com esse tema. Segundo Boyer a matemática originalmente surgiu como parte da vida diária do homem, mas o desenvolvimento da linguagem, e consequentemente de conceitos matemáticos é o que o diferenciou das demais espécies (BOYER, 2002).

Explorar a história da matemática em sala também pode ter um enfoque muito positivo durante as aulas. No Brasil, uma das mudanças sugeridas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) na forma de abordar os conteúdos de matemática, em sala de aula, é a utilização da história da matemática como recurso pedagógico. De acordo com os PCNs, este recurso permite que:

> Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favoráveis do aluno diante do conhecimento matemático. (BRASIL, 1998, p. 42).

Estudar e utilizar a história no ensino de matemática, apresenta um poder motivador, proporcionando o prazer da descoberta. Nesse sentido a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) fala que “é importante incluir a história da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática”. (BRASIL, 2018, p. 298).

D’Ambrósio (1996, p. 29) reforça o elemento motivador da História quando afirma que: “Torna-se cada vez mais difícil motivar alunos para uma ciência cristalizada. Não é sem razão que a história vem aparecendo como um elemento motivador de grande importância”. Esse argumento é sustentável na medida em que apresenta momentos de distanciamento do aspecto formal e rigoroso do conhecimento matemático.

Observar a história da matemática não como um amontoado de fatos e informações, é um dos objetivos desse trabalho. Tratar a matemática como ciência que foi sendo construída, que está em constante transformação, e que tem o pensamento matemático desenvolvido dentro do contexto histórico, cultural e social é de suma importância para os professores que desejam se valer dessa experiência.

Muito poderia se falar sobre a história da matemática. Aqui procuramos abordar um pouco da matemática egípcia, uma das mais antigas que se tem registro. Embora esteja isenta, segundo Imhausen (2007), de um aspecto formal, com demonstrações, e seja baseada em métodos empíricos, ela traz em seus papiros modelos matemáticos baseados em tabelas que podem ser vistos como receitas de como realizar os procedimentos, elencando passos a serem seguidos, o que poderia simbolizar "a busca de generalidade e universalidade que caracteriza a cientificidade", conforme coloca Roque (2012, p. 65).

Esse trabalho procura mostrar, de forma especial, como os egípcios resolviam alguns problemas, os categorizados como problemas de '*aha*' quantidade. Os problemas 24, 25, 26, 27 e 34, são analisados nos seguintes aspectos: como eles eram tratados no Papiro de Rhind, o método da falsa posição e uma comparação no modo com que resolvemos hoje as equações lineares.

A fim de situar historicamente quando e em que situações os problemas do papiro foram escritos e resolvidos, também foi dedicado uma seção especial para abordar aspectos sociais e geográficos, e objetos que ajudaram a reconstruir esse processo. Além disso, apresentamos outros documentos egípcios importantes e que trazem relevantes contribuições para a história da matemática.

Tendo em vista que as resoluções dos problemas '*aha*' mencionados anteriormente fazem uso de certos conceitos matemáticos, dedicou-se outra seção para trabalhar com o sistema de numeração egípcia e com as operações de multiplicação e divisão. As frações egípcias também foram estudadas, verificando o que representavam, algumas conversões e resultados importantes relacionados a elas e uma discussão do algoritmo guloso de Fibonacci.

Buscando se fazer uma conexão com a sala de aula, foi discutido um pouco do que os livros didáticos oferecem aos professores, percebendo que quando estudamos outros sistemas de numeração ou outras formas de abordar conceitos já conhecidos, nos deparamos com o desafio de explorar o nosso próprio sistema.

Por fim, buscamos uma articulação do que foi estudado com o conteúdo apresentado em sala de aula. A análise que fizemos ao abordar tanto o sistema egípcio de numeração quanto os problemas *'aha'*, revela que há ferramentas matemáticas e formas de raciocínio que estão ao alcance do estudante, trazendo um novo olhar sobre conceitos e ideias matemáticas. Este é o caso, por exemplo, do método da falsa posição, que apresentamos ao final do trabalho.

2 UM POUCO SOBRE O EGITO

Neste capítulo veremos uma breve retrospectiva histórica de fatos importantes que marcaram o Egito e que nos auxiliaram a compreender um pouco do funcionamento da matemática egípcia.

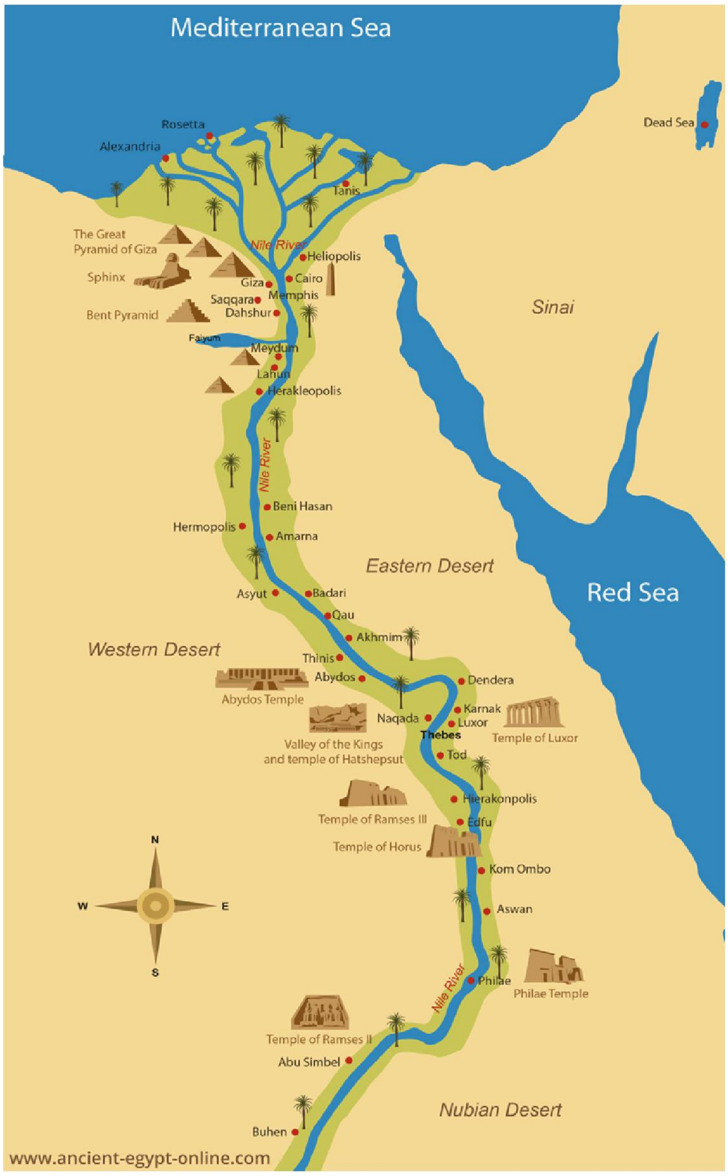
2.1 CONTEXTO HISTÓRICO E GEOGRÁFICO

Localizado entre os desertos do Saara e da Núbia, ao norte da África, o Egito é cortado pelo rio Nilo em toda a sua extensão, no sentido sul-norte. Fato esse de grande importância, uma vez que mesmo estando em pleno deserto, era possível se ter água e terras cultiváveis. Os canais de irrigação auxiliavam na distribuição de água durante as inundações do Nilo e drenagem de pântanos. Assim o rio fornecia a alimentação com a agricultura, complementados com a pesca e a caça realizada nos pântanos do delta do Nilo. Esses canais também eram utilizados como vias de transporte e deslocamento.

Antes de ser um estado unificado o Egito era composto por várias tribos que habitavam as margens do Nilo denominadas *nomos*, cada uma dessas tribos tinha uma organização política e religiosa independente. Com a unificação de alguns desses *nomos,* por volta de 3500 a.C. formaram-se duas divisões territoriais. (DOBERSTEIN, 2010, p. 40).

Nesse período pré-dinástico o Egito ficou dividido entre: o Vale, uma faixa de terra cultivável em ambos os lados do Nilo, denominada Alto Egito (*nomos* do sul) e o Delta, formado por uma extensão de terras aráveis, pastos e pântanos, que se estendiam até o Mar Mediterrâneo chamado Baixo Egito (*nomos* do norte). No Alto Egito seus imperadores usavam uma coroa branca e no Baixo Egito uma coroa vermelha.

FIGURA 1: EGITO ANTIGO



FONTE: Ancient Egypt[1]

A unificação dos dois Reinos aconteceu por volta do ano 3200 a.C., dando início a trinta e uma dinastias. A capital desse estado unificado era Mênfis. O primeiro faraó, foi Menés ou Narmer, fundador da primeira dinastia. Usava uma coroa dupla como forma de demonstrar que era imperador dos reinos do Sul e do Norte e uma coroa azul ao comandar suas tropas em guerras.

---

[1] Disponível em: <https://www.ancient-egypt-online.com/ancient-egypt-maps.html>. Acesso em: 13 mar. 2019.

FIGURA 2: COROAS NO IMPÉRIO EGÍPCIO

FONTE: https://docs.ufpr.br/~coorhis/priscila/imagens.html
Acesso em: 20 fev. 2019

A partir da unificação inicia-se o chamado Antigo Império, 3000 – 2000 a.C. Waerden (1975, p. 16). Neste período destacam-se as construções das grandes pirâmides e de grandes templos. Teve seu auge com a construção das pirâmides de Gisé: Quéops, Quefren e Miquerinos, durante a IV dinastia. De acordo Eves (2004), os sistemas de irrigação e essas grandes construções eram realizadas pelos escravos, e como forma de auxiliar esses trabalhos desenvolve-se muito a agrimensura, a engenharia prática e a matemática. Por volta do ano 2400 a.C. o Egito começa a sofrer uma desorganização, devido ao enfraquecimento do poder centralizador de seu soberano e sofre com uma guerra civil.

O Médio Império, 2000 – 1800 a.C., segundo Waerden (1975. p. 16), retoma a reunificação das forças do império por representantes da nobreza de Tebas, e esta cidade fica sendo a nova capital do Egito. Nessa fase houve um crescimento das produções artísticas e da economia, progresso nas técnicas de irrigação, além de grande expansão territorial (conquista militar da Núbia, região rica em ouro). O fim desse período veio com a invasão dos hicsos, povos nômades de origem asiática, que se mostraram superiores militarmente, ocupando a região norte do Egito (delta do Nilo), permanecendo nesse território por cerca de um século e meio.

Com a expulsão dos hicsos dá-se início ao Novo Império, 1600 – 1100 a.C., conforme Waerden (1975, p.15). Essa fase é marcada pela consolidação política, de forma mais militarista, e pelo expansionismo, com conquistas que chegaram até o rio Eufrates na Síria, principalmente com o faraó Tutmés III. O último dos grandes faraós foi Ramsés II.

A decadência do Novo Império é advinda de revoltas populares e invasão de vários povos, marcadas principalmente pela invasão assíria por volta do ano 670 a.C. Depois de nova tentativa de recuperação do império egípcio, em 525 a.C. o Egito sofre com a retomada por parte dos persas, e em 332 a.C. se dá a conquista Macedônia, com Alexandre Magno, e mais tarde a dominação romana.

2.2 ARTEFATOS QUE AUXILIARAM NA RECONSTRUÇÃO HISTÓRICA

O ano de 1799 representa um marco importante na tentativa de desvendar os mistérios da cultura egípcia. Foi durante escavações das expedições de Napoleão pelo Egito, que engenheiros franceses descobriram um fragmento basáltico polido, próximo de Alexandria, na região do braço Rosetta do delta do Nilo. Essa pedra tinha forma irregular com cerca de 112,3 cm de altura, 75,7 cm de largura e 28,4 cm de espessura (MUSEU BRITÂNICO[2]) e quase uma tonelada.

FIGURA 3: PEDRA DA ROSETA

FONTE: Museu Britânico

[2] Disponível em: <https://www.britishmuseum.org/research/collection_online/collection_object_details.aspx?objectId=117631&partId=1>. Acesso em: 14 mar. 2019.

Trazia uma mensagem escrita em hieróglifos egípcios, em demótico e grego. Os hieróglifos eram uma combinação de elementos iconográficos, silábicos e alfabéticos, com mais de mil caracteres diferentes, usados na escrita formal egípcia e de difícil tradução, geralmente era utilizado para escrever fórmulas de oferendas, rituais de passagem, em templos, pirâmides, sarcófagos, para descrever o cotidiano dos Faraós e tudo que era considerado sagrado pelos egípcios. Já o demótico era a língua popular no Egito. A terceira língua encontrada na pedra da Roseta era um tipo de grego antigo, que foi a chave para decifrar a escrita egípcia.

A importância da mensagem da pedra da Roseta está principalmente nas línguas em que foi escrita, uma vez que para traduzir os hieróglifos contidos nela, foram utilizados o demótico e sobretudo o grego, revelando assim mais de mil e quatrocentos anos de mistérios do Antigo Egito, inclusive problemas matemáticos. Seu texto é um decreto da época do faraó Ptolomeu V Epifânio (205 – 180 a.C.) declarando o faraó como um ótimo governante e seguidor dos deuses egípcios. Foi gravada em 196 a.C.

Esse grande feito deveu-se fundamentalmente ao francês Jean François Champollion (1790 – 1832) que completou os trabalhos iniciados por Thomas Young (1773 – 1829) e outros pesquisadores. Para realizar esse feito Champollion baseou-se na língua copta, a qual considerava ser a última manifestação da linguagem egípcia escrita e falada, uma vez que com a colonização árabe o Egito passou a falar e escrever nessa língua. Sua ideia foi fazer um caminho de volta, do copta para o demótico, do demótico para o hierático e do hierático para os hieróglifos. Ele defendia que o demótico era uma simplificação do hierático, e este uma simplificação dos hieróglifos. A tradução da pedra da Roseta representa um elo entre a atualidade e o Egito Antigo na sua forma de escrita. Atualmente encontra-se no Museu Britânico. (ALLEN, 2001).

Outro importante artefato descoberto foi a pedra de Palermo. É um fragmento de pedra basáltica na qual se encontram gravados, em ambos os lados, uma lista de reis egípcios, desde o período pré-dinástico até fins da V dinastia, além de alguns eventos associados aos seus reinados como informações sobre as guerras, construções de templos, cheias do Nilo e outros acontecimentos e realizações de seus soberanos.

FIGURA 4: PEDRA DE PALERMO

FONTE: Navile, 1903[3]

Não se sabe ao certo a origem arqueológica desse artefato. Recebe esse nome por encontrar seu maior fragmento no Museu Arqueológico de Palermo, na ilha italiana da Sicília, desde 1877. Outros cinco fragmentos encontram-se no Museu do Cairo, e um no Museu Petrie, em Londres. Segundo Doberstein (2010), acredita-se que a pedra original teria por volta de 2,2 m de altura e 0,61 m de largura.

É considerada uma importante fonte histórica para os estudos das civilizações egípcias antigas. Esta lista de artefatos não é exaustiva. Para efeito deste trabalho, consideraremos aqueles mais diretamente relacionados às construções matemáticas. (DOBERSTEIN, 2010).

---

[3] Naville, E., La pierre de Palerme. Recueil de Travaux Relatifs 25 (1903), 64–81.

2.3 CRONOLOGIA

Um paralelo entre a história geral, a história da civilização e a história da ciência é traçado por Waerden (1975), mostrando os períodos e alguns fatos que se destacaram.

QUADRO 1: PERÍODOS HISTÓRICOS

História Geral	História da Civilização	História da Ciência
3000 a.C. – Menés O Antigo Império	• Hieróglifos • Pirâmides	• Sistema numérico até 100 000.
2000 a.C. – 1800 a.C. O Médio Império	• Literatura • A arte dos ourives	• Papiros de Rhind e de Moscou • Calendário estrelar em sarcófagos
1700 a.C. Dominação dos Hicsos		• Ahmes realiza a cópia do papiro Rhind
1600 a.C. – 1100 a.C. O Novo Império	• Reforma religiosa monoteísta (Echnaton) • Arquitetura • Esculturas	• Astronomia primitiva (Tumba de Senmuth)
300 a.C. – 300 d.C. Helenismo	• Alexandria como o centro da arte e ciência grega • Crescimento da astrologia	• Desenvolvimento da ciência grega • Aritmética e astronomia egípcia permanecem muito primitivas

FONTE: Waerden (1975, p. 15)

Outros fatos importantes também são destacados por Eves (2004, p. 69-70) como: o cetro real egípcio encontrado com hieróglifos egípcios que aparecem números da ordem de centenas de milhares e milhões, datado de 3100 a.C.; a construção da grande pirâmide de Gizé em 2600 a.C., que certamente despendeu de problemas matemáticos e perícia profunda na arte da engenharia; o papiro de Moscou, que apresenta um texto matemático com 25 problemas e o mais antigo instrumento astronômico existente datado aproximadamente de 1850 a.C.; o papiro de Rhind (ou Ahmes) data por volta de 1650 a.C., texto com 85 problemas matemáticos copiados em hierático pelo escriba Ahmes, é um documento importante que descreve métodos de multiplicação e divisão egípcios, frações unitárias, regra da falsa posição e problemas de geometria; 1500 a.C. o relógio de sol; 1350 a.C. o papiro de Rollin mostrando a utilização de números grandes nessa época; 1167 a.C. o papiro Harris, preparado por Ramsés IV, relatando grandes obras de seu pai Ramsés III.

Esses e outros inúmeros feitos contribuíram para o desenvolvimento da matemática e engenharia egípcia.

2.4 OS PAPIROS

Muitas informações sobre a civilização egípcia são de nosso conhecimento através de registros encontrados em papiros, incluímos nesse rol documentos com conteúdo matemático. De acordo com Roque (2012, p. 27) os papiros eram escritos em hierático e continham problemas e soluções que poderiam auxiliar em situações encontradas no futuro. Era produzido a partir de uma planta encontrado no vale do rio Nilo de mesmo nome.

Entre esses documentos podemos destacar alguns deles, como os papiros de Moscou, Berlim e Rhind.

2.4.1 O Papiro de Moscou e o Papiro de Berlim

O papiro matemático de Moscou foi escrito por volta de 1890 a.C. por um escriba desconhecido, tem aproximadamente 5 m de comprimento e 8 cm de largura.

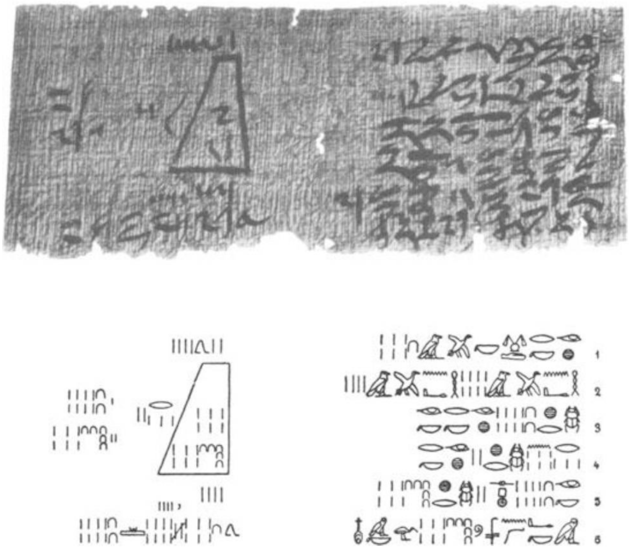
Esse papiro foi adquirido pelo egiptólogo russo Vladimir Golenishchev em 1893. Inicialmente ficou conhecido como papiro de Golenishchev, mas em 1917, após ser comprado pelo Museu de Belas Artes de Moscou, passou a ser chamado de papiro de Moscou.

Seu texto apresenta 25 problemas, mas devido seu estado de degradação a interpretação de muitos deles é difícil. Apresenta problemas que envolvem equações lineares, cálculo de áreas e volumes com triângulos e retângulos, frações e talvez um dos mais importantes seja o problema 14 que traz uma fórmula de cálculo do volume do tronco de pirâmide de base quadrada, que é expressa conforme a fórmula usada habitualmente nos dias atuais:

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

onde a e b são os lados das duas bases e h é a altura.

FIGURA 5: PROBLEMA 14



FONTE: Waerden, V. D. plate 5

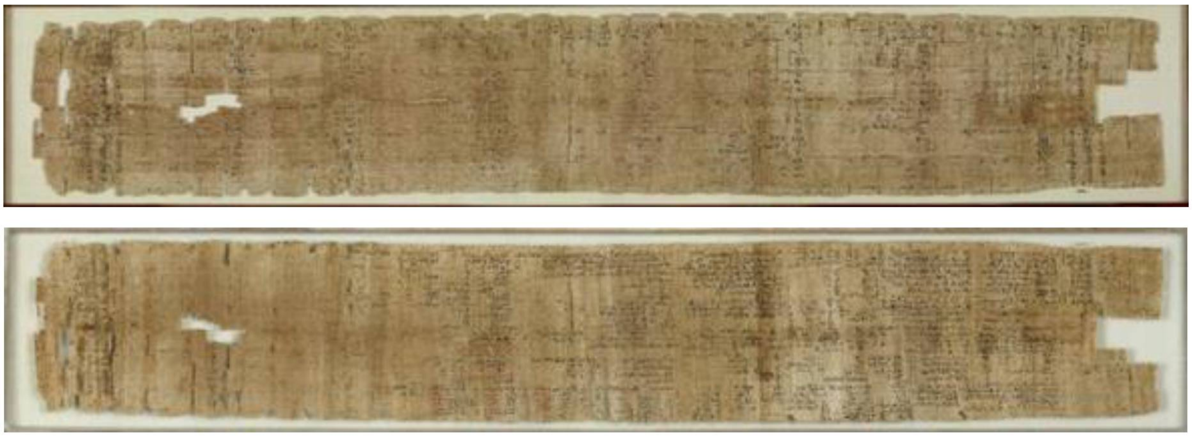
O papiro de Berlim foi escrito aproximadamente em 1800 a.C. Recebe esse nome por se encontrar atualmente no Museu Staatliche em Berlim. Foi comprado na cidade de Luxor por Henry Rhind em 1850, mas só foi analisado cinquenta anos mais tarde por Shack-Shackenburg, devido ao seu mal estado de conservação.

Apesar de bastante danificado, o papiro matemático de Berlim 6619 apresenta a resolução de dois problemas que dão origem a ideia de um sistema de equações, sendo uma delas uma equação do 1º grau e a outra do 2º grau.

2.4.2 O Papiro de Rhind

Dos papiros citados acima, aquele que trouxe mais contribuições certamente foi o papiro Rhind (ou Ahmes). Foi comprado em 1850, em Luxor, por Alexander Henry Rhind, um antiquário escocês, que viaja ao Egito por questões de saúde, mas que lá começou a estudar objetos da antiguidade. É o mais extenso dos papiros matemáticos encontrados, com aproximadamente 5,5 m de comprimento e 33 cm de largura (WAERDEN,1975).

FIGURA 6: PAPIRO DE RHIND



FONTE: MUSEU BRITÂNICO[4]

Foi encontrado em Tebas, uma cidade a beira do Nilo. Apresenta-se na forma de um manual prático com 85 problemas copiados pelo escriba Ahmes em hierático, da direita para a esquerda. Esse documento foi escrito, segundo Waerden (1975), durante o período de dominação do Egito pelos hicsos (depois de 1800 a.C.), mas deriva de um outro trabalho mais antigo provavelmente do Médio Império (2000 a.C. – 1800 a.C.).

Conforme Miatello (2008, p. 278), podemos classificar os problemas do papiro por assunto:

> Problemas nº 1-6: rações de pão;
> Problemas nº 7-20: frações multiplicadas por um fator;
> Problemas nº 21-23: completamento (sekem);
> Problemas nº 24-34 quantidade (*aha*);
> Problemas nº 35-38: problemas sobre medidas de quantidades (*aha*)
> Problemas nº 39-40: rações de pão;
> Problemas nº 41-46: capacidade de celeiro;
> Problema nº 47: tabela de conversão de unidades de medida;
> Problemas nº 48-55: área (ahet);
> Problemas nº 56-60: inclinação de pirâmides (seked);

---

[4] Disponível em: <https://www.britishmuseum.org/research/collection_online/collection_object_details/collection_image_gallery.aspx?partid=1&assetid=366145001&objectid=110036>. Acessso em: 05 ago. 2019.

> Problema nº 61b: dois terços de uma fração;
> Problema nº 62: valor dos metais;
> Problemas nº 63-66: rações de pão, cereais, gordura;
> Problema nº 67: produto do trabalho (bakw)
> Problema nº 68: produção de grãos de grupos de trabalhadores;
> Problemas nº 69-78: peso de cozimento;
> Problema nº 79: multiplicações sucessivas por 7;
> Problemas nº 80-81: tabelas de conversão de medidas;
> Problemas nos. 82-84: alimentação animal;
> Problemas. 85-87: registros não matemáticos. (MIATELLO, 2008, p. 278)

A maioria de seus problemas está preocupado em resolver situações diárias de atividades econômicas da época, como relacionados a agricultura, panificação, fabricação de cerveja e distribuição de mercadorias (MIATELLO, 2008). Apresenta importantes contribuições a respeito da matemática egípcia antiga, descrevendo os métodos de multiplicação e divisão, o uso das frações unitárias, a regra da falsa posição o problema da determinação da área do círculo, além das aplicações práticas já descritas. (EVES, 2004).

De acordo com Eves (2004, p. 70), em 1927 o papiro Rhind foi apresentado a comunidade científica. Atualmente encontra-se no Museu Britânico. Segundo o autor, quando o documento chegou ao museu era menor, formado de duas partes e lhe faltava a porção central. Somente depois de quatro anos da aquisição de A. H. Rhind, em 1854, o egiptólogo americano Edwin Smith adquiriu um documento no Egito pensando se tratar de um papiro médico, que mais tarde, por volta de 1932, historiadores da Sociedade Histórica de Nova York descobriram tratar-se da parte que faltava do papiro Rhind. Depois disso foi doado ao Museu Britânico, completando-o.

Bréhamet (2014, p. 09) faz em seu trabalho uma abordagem a respeito da tabela dos números da forma $\frac{2}{n}$ e, ao analisar algumas equações, sugere semelhanças com técnicas babilônicas. Também apresenta um importante relato, onde diz que o Papiro de Rhind seria uma cópia de um papiro mais antigo de fonte babilônica, segundo o próprio Ahmes teria colocado no papiro.

3 O SISTEMA DE NUMERAÇÃO E A MATEMÁTICA EGÍPCIA

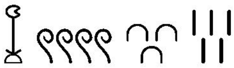
3.1 NUMERAÇÃO INTEIRA E FRACIONÁRIA

Textos encontrados por volta de 3000 a.C. no Egito apresentavam o mesmo sistema de numeração utilizado em tempos posteriores em outros documentos, um sistema de numeração decimal, aditivo e não posicional, ou seja, a posição que os símbolos eram colocados não era relevante, segundo Imhausen (2007). A desvantagem estava na escrita de grandes números devido a repetição dos símbolos. O sistema apresentava símbolos especiais para algumas potências de 10. O 1 era representado por uma barra vertical, já os números de 2 a 9 eram representados pela soma de um número correspondentes de barras, o 10 uma alça (ou osso de calcanhar ou ferradura), o 100 era representado por uma espiral (ou corda enrolada), o 1 000 por uma flor de lótus, 10 000 por um dedo, o 100 000 por um sapo (ou girino) e por um deus com as mãos levantadas o 1 000 000.

QUADRO 2: REPRESENTAÇÃO DOS NÚMEROS NA SIMBOLOGIA EGÍPCIA

1	I
10	∩
100	𓍢
1 000	𓆼
10 000	𓂭
100 000	𓆐
1 000 000	𓁨

Embora os escribas utilizassem normalmente todos os espaços do papiro, e por isso nem sempre se respeitasse a mesma ordem para a escrita e leitura, o mais comum para se escrever e ler um número era utilizar os símbolos de maior valor na frente dos de menor valor, e se houvesse mais de uma linha elas começam de cima para baixo. Veja o exemplo a seguir:



Como se trata de um sistema aditivo temos:

$$1000+100+100+100+100+10+10+10+1+1+1+1+1=1435.$$

Percebe-se nesse fato a dificuldade já mencionada na escrita de valores altos. Isso nos sugere que por ser um sistema conveniente para a época, não tinham a necessidade constante de trabalhar com grandes números.

Além dos números inteiros, os egípcios também usavam na resolução de seus problemas de pesos e medidas as frações.

A matemática egípcia utilizava, quase que exclusivamente, “frações unitárias”, isto é, frações com numerador 1, como $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, etc. , com exceção[5] de algumas, como $\frac{2}{3}$. Os símbolos eram diferentes dos usados para números inteiros. Normalmente, em hieróglifos, um sinal oval alongado, , era colocado sobre o número para determinar o recíproco de qualquer inteiro e algumas frações apresentavam uma representação especial:

QUADRO 3: REPRESENTAÇÃO DE FRAÇÕES

Fração	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$
Hieróglifo				
Hierático				

[5] Waerden (1975, p. 19 e 20) apresenta um argumento filológico para a utilização de um símbolo próprio para essa fração.

Na notação hierática, encontrada nos papiros, o símbolo oval é substituído por um ponto (IMHAUSEN, 2007, p. 14). A notação padrão, introduzida por Neugebauer, matemático austríaco e historiador da ciência e matemática antiga, utiliza-se de uma barra em cima do denominador da fração. Por exemplo,

 $= \overline{12} = \dfrac{1}{12}$

a exceção é a fração $\dfrac{2}{3}$, que é transcrita como $\overline{\overline{3}}$. Assim, podemos observar algumas relações como, $\overline{6}+\overline{6}=\overline{3}$, $\overline{3}+\overline{6}=\overline{2}$, $\overline{2}+\overline{3}+\overline{6}=1$, $\overline{10}+\overline{15}=\overline{6}$, entre outras.

3.2 ARITMÉTICA

Segundo Roque (2012, p. 60) “a adição era uma consequência direta do sistema de numeração, bastando, para obter a soma, agrupar dois números e fazer as simplificações necessárias” de forma análoga acredita-se que tratavam a subtração observando o que faltava para completar. Também vale lembrar que no papiro não se apresentam símbolos aritméticos como os que usamos hoje, Eves (2004) fala um pouco dessa simbologia:

> No papiro de Rhind encontram-se símbolos para mais e menos. O primeiro deles representa um par de pernas caminhando da esquerda para a direita, o sentido normal da escrita egípcia, e o outro representa um par de pernas caminhando da direita para a esquerda, em sentido contrário da escrita egípcia. Empregavam-se também símbolos, ou ideogramas, para igual e para incógnita. (EVES, 2004, p. 74).

Vejamos alguns exemplos:

$18+104=122$	 (fazendo a troca de 10 barras por uma alça)
$35-21=14$	

A aritmética egípcia vale-se também, do fato de que todo número natural, pode ser escrito como soma potência de 2. Conforme Eves,

> Uma das consequências do sistema de numeração egípcio é o caráter aditivo da aritmética dependente. Assim a multiplicação e a divisão eram em geral efetuadas por uma sucessão de duplicações com base no fato de que todo número pode ser representado por uma soma de potências de 2. (EVES, 2004, p.7 2).

Em virtude disso, demonstraremos o resultado a seguir.

Teorema: Todo número natural n, $n \geq 1$, pode ser escrito como uma soma de potências de 2, de maneira única.

Dem.:

Para demonstrar esse problema seguiremos as ideias apresentadas por Steffenon (2016, p. 11).

Usaremos indução em n para mostrar a existência da representação. Inicialmente note que $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $3 = 2^0 + 2^1$, $4 = 2^2$, $5 = 2^0 + 2^2$, $6 = 2^1 + 2^2$, $7 = 2^0 + 2^1 + 2^2$, assim vemos que o resultado vale para todo $n \leq 7$. Suponha que o resultado seja verdadeiro para um determinado $k > 7$. Caso $k+1$ seja uma potência de 2, temos o resultado provado. Senão, existe um j tal que $2^j < k+1 < 2^{j+1} = 2^j + 2^j$. Mas daí, $k+1-2^j \leq k$, logo aplicando a hipótese indutiva em $k+1-2^j$, existem $0 \leq p_0 < p_1 < \ldots < p_l$, tais que $k+1-2^j = 2^{p_0} + 2^{p_1} + \ldots + 2^{p_l}$. Observe que, sendo $k+1-2^j < 2^j$ temos $2^{p_0} + 2^{p_1} + \ldots + 2^{p_l} < 2^j$, donde, $p_l < j$. Portanto $k+1 = 2^{p_0} + 2^{p_1} + \ldots + 2^{p_l} + 2^j$, com $0 \leq p_0 < p_1 < \ldots < p_l < j$.

Para verificarmos a unicidade, suponha que até um certo k a representação seja única, e que para $k+1$ existam $0 \leq a_0 < a_1 < \ldots < a_r$ e $0 \leq b_0 < b_1 < \ldots < b_s$ com

$$k+1 = 2^{a_0} + 2^{a_1} + \ldots + 2^{a_r} = 2^{b_0} + 2^{b_1} + \ldots + 2^{b_s}.$$

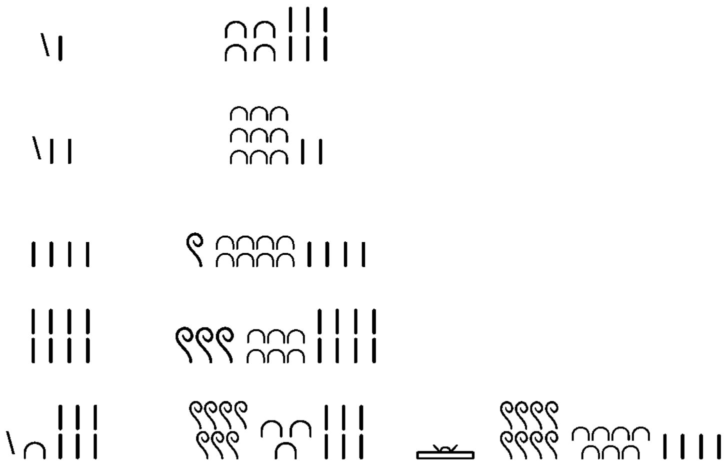
Logo,

$$2^{a_r} \leq 2^{a_0} + 2^{a_1} + \ldots + 2^{a_r} = 2^{b_0} + 2^{b_1} + \ldots + 2^{b_s} \leq 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{b_s} = 2^{b_s+1} - 1.$$

Daí segue que $2^{a_r} < 2^{b_s+1}$, e assim $a_r < b_{s+1}$, ou seja $a_r \leq b_s$. Analogamente, pode-se mostrar que $b_s \leq a_r$. Logo $a_r = b_s$. Portanto, usando a hipótese de indução concluímos que $r-1 = s-1$, e que $a_i = b_j$ para $i, j \in \{0,1,...r-1\}$. ■

Com base nisso vejamos como os egípcios procediam para realizar uma multiplicação, lembrando que "a multiplicação era sempre efetuada como uma sequência de multiplicações por 2, podendo ser empregadas também, para acelerar o processo, algumas multiplicações por 10." (Roque, 2012, p. 60).

Considere a multiplicação de 46 por 19. Na notação egípcia esse cálculo seria apresentado através de duas colunas, como representado a seguir:



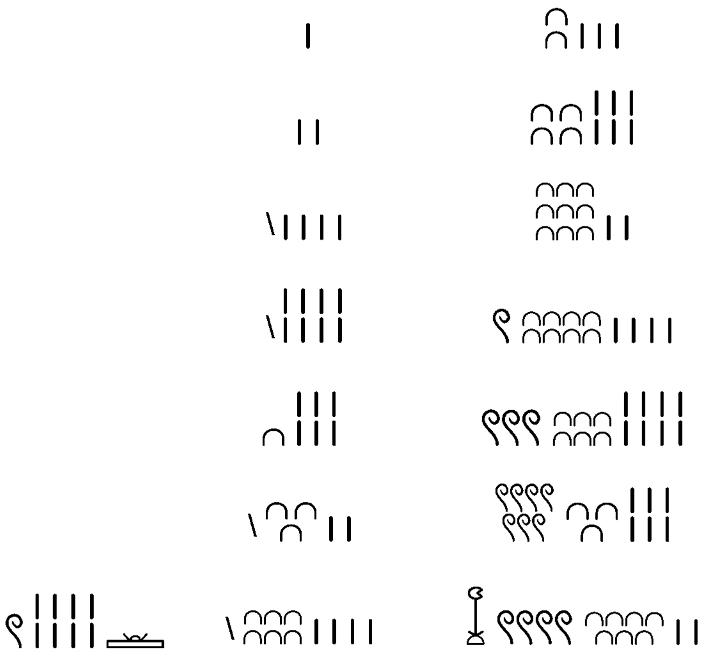
Para os egípcios esse processo consiste em tomar 19 vezes o número 46. Em notação usual esse cálculo poderia ser reescrito como na tabela abaixo

Fator de multiplicação	Número
\ 1	46
\ 2	92
4	184
8	368
\ <u>16</u>	<u>736</u>
19	874

Primeiramente observe que $19 = 1 + 2 + 16$, deste modo para alcançar o resultado da multiplicação de 46 por 19, consideramos os fatores de multiplicação 1, 2 e 16. Na coluna número iniciamos com o 46, e em seguida temos os resultados das sucessivas multiplicações por 2. Assim basta somarmos os valores correspondentes, aos fatores 1, 2 e 16 para obtermos o resultado almejado, $46 \times 19 = 46 + 92 + 736 = 874.$

Vale ressaltar que as multiplicações por 2, ou 10, devem ser realizadas até que na coluna *Fator de multiplicação* se obtenham os resultados para escrever um dos fatores da multiplicação como uma soma desses termos, e que na coluna *Número* inicia-se sempre pelo outro fator da multiplicação.

Um processo parecido com a multiplicação era feito para se efetuar as divisões. Vejamos como calculavam a divisão de 2484 por 23,



Usando uma tabela como na multiplicação, temos

Fator de multiplicação	Número
1	23
2	46
\ 4	92
\ 8	184
16	368
\ 32	736
\ 64	1472
108	2484

Observe que $2484 = 92 + 184 + 736 + 1472$, assim, considere os valores associados a esses na coluna *Fator de multiplicação*, o resultado da divisão é dado pela soma desses termos, ou seja, $2484 \div 23 = 4 + 8 + 32 + 64 = 108$. Nesse caso efetuamos uma divisão exata. Vejamos como proceder a divisão egípcia em caso de uma divisão não exata. Como exemplo, calculemos a divisão de 1398 por 15:

Fator de multiplicação	Número
\ 1	15
2	30
\ 4	60
\ 8	120
\ 16	240
32	480
\ 64	960
93	1395

Nesse exemplo não conseguimos escrever o número 1398 como uma soma dos valores obtidos na coluna *Número*, dessa forma consideramos a soma que tenha um resultado mais próximo de 1398 e que não ultrapasse esse valor, $15 + 60 + 120 + 240 + 960 = 1395$, restando 3 para chegar em 1398. Logo, associando aos valores na coluna *Fator de Multiplicação*, temos $1398 \div 15 = 1 + 4 + 8 + 16 + 64 = 93$ com resto 3.

Há divisões que resultam em quocientes fracionários. Isso será tratado na próxima seção.

3.3 AS FRAÇÕES EGÍPCIAS

Vale ressaltar que as frações no sentido utilizado pelos egípcios, não tinham a mesma correspondência que fazemos com o numerador e o denominador, as frações $\frac{1}{n}$ correspondiam a quanto cada um ganharia em uma divisão de um pão, por exemplo, em n partes iguais. Assim o símbolo oval não tem um sentido cardinal, mas ordinal (Roque, 2012).

As frações da forma $\frac{a}{b}$, $a,b \neq 1$, não pareciam algo elementar para os egípcios, exceto a fração $\frac{2}{3}$ que era utilizada com certa frequência e a qual atribuíam um sentido especial em seus cálculos. Este fato fica bem evidenciado quando vemos que para encontrar o terço de determinado valor, incialmente encontravam os dois terços e tomavam depois a metade disso (Boyer, 2002).

O Papiro Rhind fornece uma tabela[6] com os valores de $\frac{2}{n}$, para n ímpar variando de 5 a 101, como soma de frações unitárias. Alguns exemplos colocados no papiro:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

$$\frac{2}{71} = \frac{1}{40} + \frac{1}{568} + \frac{1}{710}.$$

Para as frações da forma $\frac{2}{p}$, com p primo, encontrou-se uma relação que mostra que essa fração pode ser escrita como uma soma de frações unitárias distintas de forma única.

Teorema: Se p é um número primo, a fração $\frac{2}{p}$ pode ser expressa de forma única como a soma de duas frações unitárias distintas.

Há várias maneiras de se demonstrar esse resultado, como observamos em Anglin (1994) e Almeida e Correa (2004). Optamos aqui por apresentar uma prova mais longa, que evidenciasse o processo construtivo, descrita por Almeida e Correa.

Dem.:

Consideraremos inicialmente o caso de p um número ímpar maior que 2 e a e b divisores de p tais que ab divide p. Então,

---

[6] Um modelo pode ser encontrado em CHACE, 1927, p. 21-22.

$$\frac{2}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

se, e somente se,

$$x=\frac{p}{a}\left(\frac{a+b}{2}\right) \text{ e } y=\frac{p}{b}\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

$\Rightarrow)$ Seja,

$$\frac{2}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{y+x}{xy}.$$

Assim temos $2xy=p(x+y)$. Logo, como p é ímpar, $x+y$ deve ser um número par. Dessa forma, existe k natural de modo que $x+y=2k$. Portanto $2xy=2pk$, ou seja, $xy=pk$. Daí temos que o sistema

$$\begin{cases} x+y=2k \\ xy=pk \end{cases},$$

que tem solução, $x=y=k\pm\sqrt{k^2-pk}$.

Para que essas raízes sejam naturais, $k^2-pk=k(k-p)$ deve ser o quadrado de um número natural. Daí temos uma das duas alternativas possíveis:

i) k e $k-p$ são, ambos, quadrados.

Então, existe $u,v\in N$ de modo que $k=u^2$ e $k-p=v^2$, donde $p=u^2-v^2$, ou seja, $p=(u+v)(u-v)$. Desta forma, considere $a=u+v$ e $b=u-v$, os valores procurados. Assim vemos que a e b são divisores de p, tais que $p=ab$, e, sendo $u=\dfrac{a+b}{2}$, temos $k=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$.

ii) k e $k-p$ não são quadrados.

Seja $d=\mathrm{mdc}\,(k,k-p)$. Assim $k=sd$ e $k-p=td$, para algum s,t inteiros. Como $k(k-p)=std^2$ é um quadrado, o produto st também deve ser. E sendo s e t primos entre si, temos que $s=\dfrac{k}{d}$ e $t=\dfrac{k-p}{d}$ também devem ser quadrados. Logo recaímos no caso anterior, obtendo $\tilde{k} = \frac{k}{d} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ e $\tilde{p} = \frac{p}{d} = ab$. Substituindo os valores de $\tilde{k}$ e $\tilde{p}$ na expressão $\tilde{k} \pm \sqrt{\tilde{k}^2 - \tilde{p}\tilde{k}}$, obtemos, após alguns cálculos,

$$x = \frac{p}{a}\left(\frac{a+b}{2}\right) \text{ e } y = \frac{p}{b}\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

como desejávamos.

$\Leftarrow$) Para esse caso tome primeiramente as frações $\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{y}$, com x e y escritos como acima. Assim

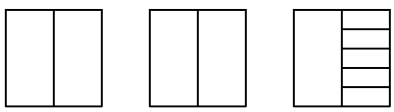
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{p}{a}\left(\frac{a+b}{2}\right)} + \frac{1}{\frac{p}{b}\left(\frac{a+b}{2}\right)} = \frac{2b}{p(a+b)} + \frac{2a}{p(a+b)} = \frac{2(a+b)}{p(a+b)} = \frac{2}{p}$$

Como consideramos inicialmente p ímpar, seus divisores a e b também são ímpares. Daí $a+b$ é par, o que garante o fato de x e y escritos acima serem números naturais.

Agora voltando ao caso geral, com p primo. Nesse caso são o 1 e o próprio p. Assim, fazendo $a = 1$ e $b = p$, no caso já demonstrado, obtemos

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \text{ com } x = p\left(\frac{p+1}{2}\right) \text{ e } y = \frac{p+1}{2}. \blacksquare$$

A forma de tratar as frações da forma $\frac{a}{b}$ dessa maneira, segundo Roque (2012), se deve a maneira com que os egípcios efetuavam e pensavam a divisão. Por exemplo, se quisessem repartir 3 pães entre 5 homens, inicialmente dividir-se-iam os pães ao meio e cada um tomaria sua metade. Feito isto, sobraria uma metade que deveria ser dividida em 5 partes. Assim cada homem receberia $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$.



Mas como encontrar essa soma de frações unitárias para qualquer fração própria? Uma das formas mais utilizadas é o algoritmo guloso[7] de Fibonacci redescoberto posteriormente por Sylvester (1880), o qual usa o seguinte método: encontrar a maior fração unitária menor que a fração $\frac{a}{b}$ e fazer a diferença entre as duas, sempre repetindo o processo com a fração obtida.

Exemplo. Escreva a fração $\frac{6}{7}$ como soma de frações unitárias.

Utilizaremos aqui as técnicas descritas por Roque (2012, p. 59).

1º) Inverta a fração $\frac{6}{7}$, obtendo $\frac{7}{6}$.

2º) Descubra o menor número inteiro que seja maior do que $\frac{7}{6}$. Para tanto, pegue o quociente da divisão $7 \div 6$ e adicione 1, assim obtemos o número 2. Em seguida, inverta esse valor e obtenha a fração $\frac{1}{2}$.

3º) Subtraia $\frac{1}{2}$ da fração $\frac{6}{7}$, ou seja,

$$\frac{6}{7} - \frac{1}{2} = \frac{5}{14} \Rightarrow \frac{6}{7} = \frac{1}{2} + \frac{5}{14}$$

Agora, repita os passos para a fração $\frac{5}{14}$, assim teremos:

1º) Inverta a fração $\frac{5}{14}$ e obtenha $\frac{14}{5}$.

2º) O menor inteiro maior que $\frac{14}{5}$ é 3, cuja fração inversa é $\frac{1}{3}$.

3º) Subtraia $\frac{1}{3}$ de $\frac{5}{14}$, assim:

$$\frac{5}{14} - \frac{1}{3} = \frac{1}{42} \Rightarrow \frac{5}{14} = \frac{1}{3} + \frac{1}{42}$$

Seguindo o raciocínio, deveríamos obter a próxima fração unitária diferente de $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ que fosse menor ou igual a $\frac{1}{42}$. Como essa fração é o próprio $\frac{1}{42}$ o

[7] O termo “guloso” é tomado aqui no sentido computacional, isto é, de uma etapa para a seguinte, o algoritmo escolhe a fração mais óbvia (“apetitosa”), afim de escrever a fração original como soma de unitárias.

processo está acabado, uma vez que já é uma fração unitária. Dos resultados acima, obtemos

$$\frac{6}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{42}\ .$$

Esse método nem sempre fornece a representação mais simples utilizando frações unitárias. Por exemplo, quando aplicado o algoritmo na fração $\frac{3}{7}$, obtemos

$$\frac{3}{7}=\frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{231}.$$

No entanto, outra solução mais simples pode ser encontrada,

$$\frac{3}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{28}.$$

O resultado a seguir nos mostra que podemos efetuar esses cálculos de modo a sempre encontrar tal representação.

Teorema. Toda fração própria da forma $\frac{a}{b}$, com $a,b\in N$, $\mathrm{mdc}(a,b)=1$ pode ser escrita como soma de frações unitárias distintas.

Dem.:

Seguindo a ideia apresentada por Anglin (1994, p. 3) a prova reside em encontrar a maior fração unitária menor que a fração $\frac{a}{b}$ e fazer a diferença entre as duas, repetindo o processo com os restos.

Para o caso $a=1$, o problema está resolvido.

Assim considere a fração $\frac{a}{b}$, com $a,b\in N$ e $1<a<b$. Vamos mostrar que existe $q\in N$, de modo que $\frac{1}{q}<\frac{a}{b}<\frac{1}{q-1}$.

Como $a<b$, existe $q_1, r_1\in N$, com $r_1<a$, tal que $b=aq_1+r_1$. Daí, temos

$$q_1+\frac{r_1}{a}<q_1+1\Rightarrow aq_1+r_1<a(q_1+1)\Rightarrow b<a(q_1+1)\Rightarrow\frac{1}{q_1+1}<\frac{a}{b}$$

e

$$q_1<q_1+\frac{r_1}{a}\Rightarrow aq_1<aq_1+r_1\Rightarrow aq_1<b\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{1}{q_1}.$$

Logo, faça $q = q_1 + 1$. Daí,

$$\frac{1}{q_1+1} < \frac{a}{b} < \frac{1}{q_1} \Rightarrow \frac{1}{q} < \frac{a}{b} < \frac{1}{q-1}.$$

Note que, $\frac{a}{b} - \frac{1}{q_1+1} > 0$ e $\frac{a}{b} - \frac{1}{q_1} < 0$. Ainda,

$$\frac{a(q_1+1)-b}{b(q_1+1)} = \frac{aq_1+a-b}{b(q_1+1)} = \frac{aq_1+a-aq_1-r_1}{b(q_1+1)} = \frac{a-r_1}{b(q_1+1)}.$$

Agora, tomando $a_2 = a - r_1$ e $b_2 = b(q_1+1)$, temos

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a-r_1}{b(q_1+1)} < \frac{a}{b} - \frac{1}{q_1} < \frac{a}{b}.$$

Continuando o processo teremos, após um número n de passos, $r_n = 0$. Nesse caso, teremos $a_n = 1$ e $b_n = q_n$, considerando que $\mathrm{mdc}(a,b) = 1$. Dessa forma

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} - \ldots - \frac{1}{q_{n-1}} = \frac{1}{q_n} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \ldots + \frac{1}{q_n}. \blacksquare$$

O fato de se escrever uma fração qualquer como soma de frações unitárias sempre foi um fato que intrigou muitos matemáticos. Os matemáticos Paul Erdös e Ernst Straus conjecturaram em 1948, que existem $a, b, c \in N$ distintos entre si, tais que

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

para $n > 5$, $n \in N$. Esse problema só foi resolvido, até o momento, de forma empírica para $n < 10^{24}$, o caso geral ainda se encontra aberto, sendo passível de investigação (PITOMBEIRA, 2012, p. 29). Segundo Anglin (1994, p. 4), embora esse problema ainda não tenha sido resolvido existem alguns resultados parciais

$$\frac{4}{4m+2} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(2m+1)}$$

$$\frac{4}{4m+3}=\frac{1}{m+2}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\frac{1}{(m+1)(4m+3)}$$

$$\frac{4}{8m+5}=\frac{1}{2(m+1)}+\frac{1}{2(m+1)(3m+2)}+\frac{1}{2(3m+2)(8m+5)}$$

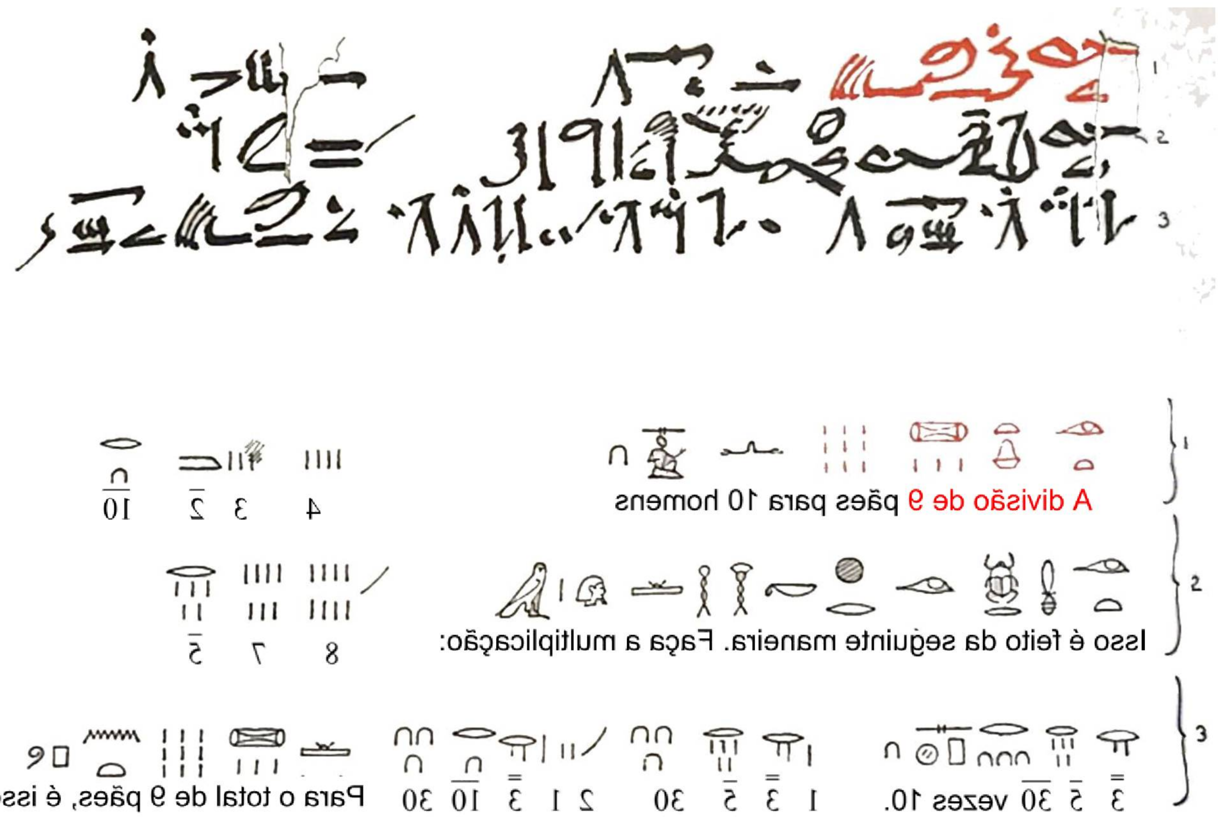
$$\frac{4}{3m+2}=\frac{1}{m+1}+\frac{1}{3m+2}+\frac{1}{(m+1)(3m+2)}.$$

3.4 O PROBLEMA 6 DO PAPIRO DE RHIND E AS DIVISÕES FRACIONÁRIAS

Para tratarmos das divisões fracionárias, analisemos o problema 6 do Papiro de Rhind. Chace (1927, p. 62) enuncia: Divida 9 pães entre 10 homens.

Observe que ao apresentar esse e outros problemas, o escriba não descreve o processo de solução. Ao contrário, ele apresenta a solução e a testa, verificando que ela de fato resolve o problema. Acrescentamos uma tradução dos hieróglifos usando o mesmo sentido da escrita egípcia, da direita para a esquerda.

FIGURA 7: PROBLEMA 6



FONTE: Chace, 1929, plate 38.

Neste problema Ahmes indica que a solução é $\overline{\overline{3}}+\overline{5}+\overline{30}$. Salvo um erro de grafia onde o escriba coloca 30 ao invés de $\overline{30}$.

Para obter tal solução, incialmente trabalhamos com divisões fracionárias apresentando um processo semelhante aos utilizados na multiplicação e divisão, tentando imaginar uma possível reconstrução do modo de pensar do escriba na busca da solução. Trataremos do problema usando as notações usual e de Neugebauer.

TABELA 1: DIVISÃO DE 9 POR 10

Fator de Multiplicação	Notação de Neugebauer	Número
1	1	10
2	2	20
4	4	40
$\frac{4}{5}=\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$	$\overline{\overline{3}}+\overline{10}+\overline{30}$	8 /
$\frac{1}{10}$	$\overline{10}$	1 /

Observe que $\frac{4}{5}=2\cdot\frac{2}{5}$ e usando a tabela de conversões do Papiro de Rhind, temos $2\cdot\frac{2}{5}=2\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)=\frac{2}{3}+\frac{2}{15}=\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$. Por outro lado, veja que para obter $\frac{1}{10}$ na última linha basta observar que $\frac{4}{5}=\frac{8}{10}$.

Desta forma, para obter 9, fazemos a soma dos valores associados aos números 8 e 1,

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{10}=\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{30}=\overline{\overline{3}}+\overline{5}+\overline{30},$$

que era o resultado dado no papiro.

Uma solução para o problema 6 também pode ser procurada utilizando o método de Fibonacci descrito anteriormente.

Como queremos dividir 9 pães entre 10 homens, buscamos escrever a fração $\frac{9}{10}$ como soma de frações unitárias. Logo, basta aplicarmos as etapas do processo:

1º) Inverta a fração $\frac{9}{10}$, obtendo $\frac{10}{9}$.

2º) Descubra o menor número inteiro que seja maior do que $\frac{10}{9}$. Para tanto, pegue o quociente da divisão $10 \div 9$ e adicione 1, assim obtemos o número 2. Em seguida, inverta esse valor e obtenha a fração $\frac{1}{2}$.

3º) Subtraia $\frac{1}{2}$ da fração $\frac{9}{10}$, ou seja,

$$\frac{9}{10} - \frac{1}{2} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{9}{10} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5}.$$

Agora repita os passos com a fração $\frac{2}{5}$.

1º) Inverta a fração $\frac{2}{5}$ e obtenha $\frac{5}{2}$.

2º) O menor inteiro maior que $\frac{5}{2}$ é 3, cuja fração inversa é $\frac{1}{3}$.

3º) Subtraia $\frac{1}{3}$ de $\frac{2}{5}$, assim:

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}.$$

Logo, substituindo o valor de $\frac{2}{5}$ na equação anterior, obtemos:

$$\frac{9}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}.$$

Note que essa solução não é a mesma descrita acima, mas fazendo a prova real verificamos que o resultado é verdadeiro. Vejamos como proceder, usando a tabela de conversões das frações da forma $\frac{2}{n}$ apresentada em Chace (1927, p. 21-22) :

TABELA 2: MULTIPLICAÇÃO DE 1/2+1/3+1/15 POR 10

Fator de multiplicação	Notação de Neugebauer	Número
1	$\overline{2}+\overline{3}+\overline{15}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$
\ 2	$1+\overline{\overline{3}}+\overline{10}+\overline{30}$	$\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{15}=1+\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$
4	$3+\overline{3}+\overline{5}+\overline{15}$	$2+\frac{4}{3}+\frac{2}{10}+\frac{2}{30}=3+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}$
\ 8	$6+\overline{\overline{3}}+\overline{3}+\overline{15}+\overline{10}+\overline{30}$	$6+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{15}=6+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$

Como buscamos o valor 10, façamos a soma dos valores da coluna *Número* associados a 2 e 8 na coluna *Fator de multiplicação*,

$$\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}\right)+\left(6+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}\right)=7+1+\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{2}{15}=8+\frac{10+3+2}{15}=9.$$

No Papiro de Rhind, a resolução do problema é apresentada na forma de uma verificação, conforme descrevemos acima. A seguir temos a resolução dada pelo escriba ao Problema 6 (CHACE, 1927, p. 62):

TABELA 3: MULTIPLICAÇÃO DE 2/3+1/5+1/30 POR 10

Fator de multiplicação	Notação de Neugebauer	Número
1	$\overline{\overline{3}}+\overline{5}+\overline{30}$	$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{30}$
\ 2	$1+\overline{\overline{3}}+\overline{10}+\overline{30}$	$\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{30}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=\right)\ 1+\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$
4	$3+\overline{2}+\overline{10}$	$\left(2+\frac{4}{3}+\frac{2}{10}+\frac{2}{30}=\right)\ 3+\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$
\ 8	$7+\overline{5}$	$\left(6+1+\frac{2}{10}=\right)\ 7+\frac{1}{5}$

Fonte: Chace, 1927, p. 62

Os cálculos envolvidos para se passar de uma linha para outra, usando o pensamento egípcio, nem sempre são elementares. Por vezes é um desafio tentar reconstruir o processo na obtenção da solução. A seguir um raciocínio que poderia ter sido utilizado para passar da primeira para a segunda linha, fazendo uso da tabela de conversões para frações unitárias

$$2\cdot\left(\overline{\overline{3}}+\overline{5}+\overline{30}\right)=\overline{\overline{3}}+\overline{\overline{3}}+\overline{3}+\overline{15}+\overline{15}=1+\overline{3}+\overline{3}+\overline{10}+\overline{30}=1+\overline{\overline{3}}+\overline{10}+\overline{30}.$$

Já na passagem da segunda para terceira linha temos

$$2\cdot\left(1+\overline{\overline{3}}+\overline{10}+\overline{30}\right)=2+\overline{\overline{3}}+\overline{\overline{3}}+\overline{5}+\overline{15}=2+1+\overline{3}+\overline{5}+\overline{15}=3+\overline{3}+\overline{5}+\overline{15}.$$

Mas, por sua vez,

$$3+\overline{3}+\overline{5}+\overline{15}=3+\overline{3}+\overline{10}+\overline{10}+\overline{15}=3+\overline{10}+\overline{3}+\overline{6}=3+\overline{10}+\overline{2}.$$

Para obtermos as igualdades acima, usamos as identidades $\overline{10}+\overline{15}=\overline{6}$ e $\overline{3}+\overline{6}=\overline{2}$, já indicadas anteriormente.

Somando os valores correspondentes aos *Fatores de multiplicação* 2 e 8 temos

$$1+\frac{2}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+7+\frac{1}{5}=8+\frac{20+3+1+6}{30}=9,$$

totalizando 9 pães para 10 homens, como era procurado.

4 CÁLCULOS "*AHA*" E O MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO

4.1 OS PROBLEMAS *AHA*

De acordo com Waerden (1975, p. 27), a palavra egípcia '*h*', que costumava ser pronunciada, '*hau*' e agora, talvez de modo mais preciso, como '*aha*' indica uma quantidade, uma coleção. Os problemas '*aha'* tratam de quantidades desconhecidas e que acrescidos de uma fração ou várias frações desse valor resultam em um determinado número, semelhantes as nossas equações lineares, embora a forma de resolução apresentada no papiro para tais problemas seja bem diferente das que costumamos realizar.

Miatello (2008, p. 278), quando traz a classificação dos problemas do papiro de Rhind diz que estes são abordados nos problemas de número 24 a 34.

O método utilizado para a resolução consiste em um "chute inicial que é corrigido durante o processo" (ROQUE, 2012, p. 64), atualmente conhecido como método da falsa-posição.

Vejamos como o problema 24 é resolvido no papiro de Rhind, seguindo as ideias de Chace (1927, p. 67) e Clagett (1999, p. 140). Para tratar esse problema e os demais abordados na sequência, usaremos a notação da justaposição dos termos, adotada pelos autores. Esta não deve ser entendida como uma multiplicação, mas sim como uma soma entre seus termos. Por exemplo:

$$2\frac{1}{4}\frac{1}{8} = 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\,.$$

Problema 24: *Aha,* $\overline{7}$ dela, adicionadas, resultam 19.

Solução:

Apesar de o problema não apresentar uma pergunta a ser respondida, o texto do escriba deixa claro que se trata do cálculo de uma quantidade, isto é, *'aha'*. Para obtê-la, o escriba assume inicialmente que seu valor é 7, daí

Fator de multiplicação	Notação de Neugebauer	Número
\ 1	\ 1	7
\ $\frac{1}{7}$	\ $\overline{7}$	1
Total		8.

Observe que ao escolher o número 7 como chute inicial, os cálculos ficam simplificados e obtemos nessa etapa que 7 adicionado de seu sétimo resulta 8, ou seja, $7+\frac{1}{7}\times 7=8$.

No entanto, buscávamos um número que somado com seu sétimo fosse 19. Para tanto, basta encontrarmos um número que multiplicado por 8 resulte 19, e assim, se multiplicarmos ambos os membros da igualdade acima, teremos que o produto desse número por 7 é o valor procurado.

Fator de multiplicação	Notação de Neugebauer	Número
1	1	8
\ 2	\ 2	16
$\frac{1}{2}$	$\overline{2}$	4
\ $\frac{1}{4}$	\ $\overline{4}$	2
\ $\frac{1}{8}$	\ $\overline{8}$	1

Total: $2\frac{1}{4}\frac{1}{8}=2\,\overline{4}\,\overline{8}$. Assim,

Fator de multiplicação	Notação de Neugebauer	Número
\ 1	$2\,\overline{4}\,\overline{8}$	$2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$
\ 2	$4\,\overline{2}\,\overline{4}$	$4\frac{1}{2}\frac{1}{4}$
\ 4	$9\,\overline{2}$	$9\frac{1}{2}$

Então, a quantidade é $16\frac{1}{2}\frac{1}{8} = 16\,\overline{2}\,\overline{8}$ e seu sétimo é $2\frac{1}{4}\frac{1}{8} = 2\,\overline{4}\,\overline{8}$, que somados fazem 19.

Os demais problemas que tratam de '*aha*' quantidades estão enunciados a seguir:

Problema 25: *Aha,* $\overline{2}$ dela, adicionadas, resultam 16.

Problema 26: *Aha*, $\overline{4}$ dela, adicionadas, resultam 15.

Problema 27: *Aha*, $\overline{5}$ dela, adicionadas, resultam 21.

Problema 28: *Aha* é somada com seus $\overline{\overline{3}}$, dessa soma é subtraído $\overline{3}$, restando 10.

Problema 29: *Aha*, acrescida de $\overline{\overline{3}}$ dela, em seguida, $\overline{3}$ dessa soma é adicionada, então toma-se $\overline{3}$ desse total resultando 10.

Problema 30: Qual é *Aha* de que $\overline{\overline{3}}$ e $\overline{10}$ é igual a 10.

Problema 31: *Aha*, $\overline{\overline{3}}$ dela, $\overline{2}$ dela, e $\overline{7}$ dela, adicionadas, fazem 33.

Problema 32: *Aha*, $\overline{3}$ dela, e $\overline{4}$ dela, adicionados resultam em 2.

Problema 33: *Aha*, $\overline{\overline{3}}$ dela, $\overline{2}$ dela, e $\overline{7}$ dela, adicionados, resultam 37.

Problema 34: *Aha*, $\overline{2}$ dela, e $\overline{4}$ dela, adicionados, resultam 10.

Considerando os problemas descritos, do 24 ao 29 temos problemas de quantidade (*Aha*) que envolvem equações do 1º grau com uma incógnita e podem ser resolvidos pelo método da falsa posição. Já do 30 ao 34 são problemas de quantidade, semelhantes aos anteriores, mas que apresentam um grau de dificuldade maior, exigindo o método da falsa posição e multiplicação. (CHACE, 1927, p. 11).

Faremos uma análise mais detalhada dos problemas 24 a 27 e 34 mais adiante. Entretanto é ainda importante analisarmos uma forma de resolução apresentada no papiro, frequentemente chamada de **método da falsa posição**.

4.2 O MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO

Para tratar de equações lineares da forma $x+ax=b$ ou $x+ax+bx=c$, os egípcios usavam um método, hoje conhecido como método da falsa posição, onde se considerava um "chute" inicial e se desenvolvia o método até chegar a solução procurada.

Essa regra é descrita por Roque, para darmos a solução de uma equação atualmente representada da forma $ax=b$.

> Escolhemos um valor arbitrário x_0 para x e calculamos o valor de ax_0, que chamaremos de b_0. Na prática, procuraremos escolher esse valor inicial de um modo que facilite as contas. Em seguida, investigamos por que número devemos multiplicar b_0 para obter b e chegamos a $\frac{b}{b_0}$. Para manter inalterada a igualdade, ax_0 devemos multiplicar esse mesmo número por x_0. Obtemos, assim, que $a\times\left(x_0\times\frac{b}{b_0}\right)=b_0\times\frac{b}{b_0}=b$. Logo, a solução de $ax=b$ deve ser $x_0\times\frac{b}{b_0}$. (ROQUE, 2012, p. 64).

A fim de exemplificar a regra, analisemos o problema 24 do Papiro de Rhind (PITOMBEIRA, 2012, p. 49).

Exemplo: *Aha,* $\overline{7}$ dela, adicionadas, resultam 19.

Esse problema poderia ser reescrito da seguinte forma: Uma quantidade e seus $\frac{1}{7}$, somados, resultam 19. Qual a quantidade? Na linguagem usual seja x a quantidade procurada. Assim temos a equação

$$x+\frac{1}{7}x=19.$$

Inicialmente o processo sugere que seja dado um valor inicial x_0, “chute”, para simplificarmos os cálculos tome $x_0 = 7$. Assim ele, adicionado de seu sétimo, totalizaria 8, que é o b_0,

$$7 + \frac{1}{7} \times 7 = 8.$$

Como procuramos para o total o valor 19, precisamos encontrar um número que multiplicado por 8 resulte 19. Logo, multiplique ambos os membros da equação acima por $\frac{19}{8} = \frac{b}{b_0}$,

$$\left(7 \times \frac{19}{8}\right) + \frac{1}{7} \times \left(7 \times \frac{19}{8}\right) = 8 \times \frac{19}{8} = 19.$$

Portanto a solução do problema é $x_0 \times \frac{b}{b_0} = 7 \times \frac{19}{8} = \frac{133}{8}$.

Comparativamente, hoje a equação

$$x + \frac{1}{7}x = 19,$$

pode ter a solução expressa tomando os passos a seguir,

$$x + \frac{1}{7}x = 19 \Rightarrow \frac{8}{7}x = 19 \Rightarrow x = \frac{19 \times 7}{8} \Rightarrow x = \frac{133}{8}.$$

5 ANÁLISE DOS PROBLEMAS 24, 25, 26, 27 E 34

5.1 HIERÁTICO E HIEROGLÍFICO EM PROBLEMAS NUMÉRICOS

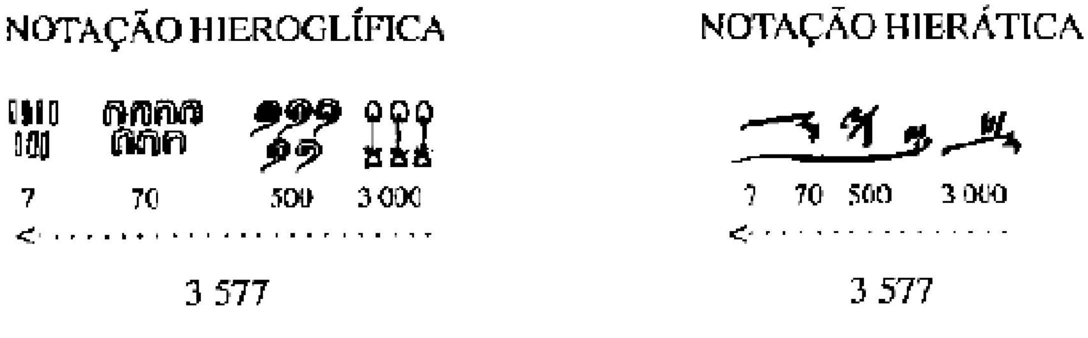
Como falado anteriormente, os escritos egípcios encontravam-se em quatro formas: hieróglifos, usados nas escritas formais; hierática, forma mais cursiva empregada principalmente pelos escribas e na qual o papiro de Rhind foi redigido, ambas utilizadas no início da história egípcia; demótica, aparecendo por volta de 800 a.C. em substituição ao hierático no uso diário e o copta, onde a língua egípcia foi escrita com o alfabeto grego, esta surgiu por volta do século III d.C. e ainda sobrevive na liturgia da igreja (CHACE, 1927).

De acordo com Ifrah,

> Contrariamente ao que se poderia acreditar, o sistema dos hieróglifos não foi a escrita comum do Egito dos faraós: quase não foi empregada para consignar as contas correntes, os recenseamentos ou os inventários, nem para redigir os relatórios, testamentos, documentos econômicos, administrativos, jurídicos, literários, mágicos, religiosos, matemáticos ou astronômicos. Na verdade, o minucioso desenho dos hieróglifos respondia a fins decorativos e comemorativos e tinha um caráter solene... Assim, desde a época das primeiras dinastias, os escribas simplificaram progressivamente seu traçado para terminar em verdadeiros sinais cursivos, aos quais os autores gregos deram o nome de sinais hieráticos. (IFRAH, 1997, p. 355)

Algumas das características do sistema hierático eram a escrita sempre da direita para a esquerda e a aparição de várias ligaduras, não somente num mesmo sinal, mas também entre dois ou mais sinais, conforme Ifrah (1997, p. 356), com objetivo de tornar a escrita mais ágil.

FIGURA 8: NOTAÇÃO HIEROGLÍFICA x HIERÁTICA



FONTE: Ifrah, 1997, p. 364

De certa forma, pode-se dizer que a escrita hierática egípcia, foi apenas uma evolução gráfica. Comparativamente podemos pensar nas letras capitais usadas em nossos monumentos de pedra e as manuscritas que empregamos cotidianamente. No entanto, diferentemente desse caso e da escrita de outros povos, o hierático jamais conseguiu eliminar ou influenciar o modelo hieroglífico, mas foi desenvolvido e usado conjuntamente. Essa forma abreviada de escrita permaneceu em uso durante cerca de 2000 anos, do III ao I milênio a.C. Por volta do século XII a.C., foi pouco a pouco sendo substituída pelo demótico (IFRAH, 1997). Segundo Imhausen (2007, p. 14), “é costume na egiptologia fornecer um hieróglifo como transcrição do texto fonte em hierático. ”

As modificações ocorridas durante o tempo não fizeram com que a escrita hierática fosse sendo mais simplificada, se compararmos a escrita hieroglífica, ao contrário

> ...pelo emprego de numerosas ligaduras e pela introdução de vários pontos diacríticos, as formas correspondentes transformaram-se progressivamente em sinais difíceis de reconhecer. Os sinais que resultaram deles só tiveram então com seus protótipos uma semelhança muito vaga, terminando por vezes em sinais desprovidos de qualquer valor de evocação visual direta. (IFRAH, 1997, p. 359-360)

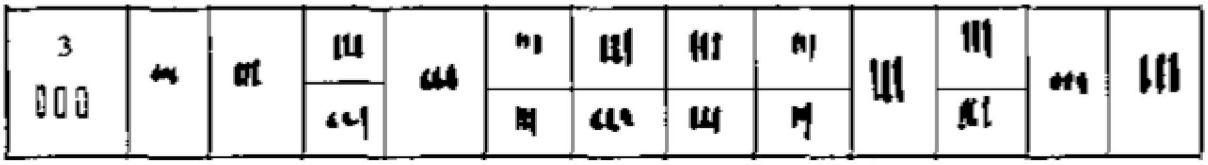
Vejamos alguns modelos que mostram as comparações entre as escritas hieroglífica e hierática, a fim de ilustrar o que foi dito e comparar as figuras dos problemas analisados posteriormente.

FIGURA 9: ESCRITA HIEROGLÍFICA E HIERÁTICA - MODELO

FONTE: Ifrah, 1997, p. 356

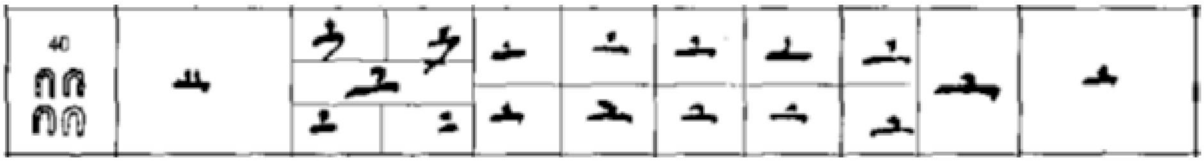
Em relação aos algarismos, vejamos exemplos apresentados em hieroglífico, e as mudanças ocorridas durante o Antigo Império, Médio Império, Segundo Período Intermediário, Novo Império I (XVIII e XIX Dinastias), Novo Império XX e XXI Dinastia, e XXII Dinastia. Em anexo estão as tabelas completas.

FIGURA 10: ALGARISMOS HIERÁTICOS DAS UNIDADES - 3



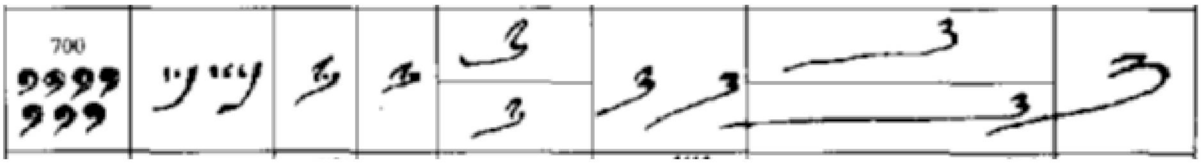
FONTE: Ifrah, 1997, p. 360

FIGURA 11: ALGARISMOS HIERÁTICOS DAS DEZENAS - 40



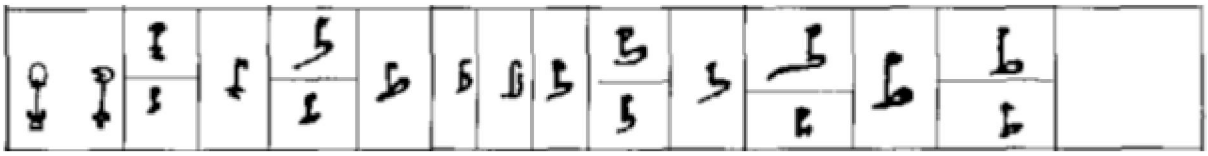
FONTE: Ifrah, 1997, p. 361

FIGURA 12: ALGARISMOS HIERÁTICOS DAS CENTENAS - 700



FONTE: Ifrah, 1997, p. 362

FIGURA 13: ALGARISMOS HIERÁTICOS DOS MILHARES - 2000



FONTE: Ifrah, 1997, p. 363

5.2 DISCUSSÃO DOS PROBLEMAS

Vejamos as fotos dos problemas 24, 25, 26, 27 e 34, e na sequência analisemos cada um deles. Os quatro primeiros tratam de equações lineares da forma $x+ax=b$ e o último de uma equação linear da forma $x+ax+bx=c$.

FIGURA 14: FOTOS DOS PROBLEMAS 24, 25, 26 E 27 ESCRITOS EM HIERÁTICOS

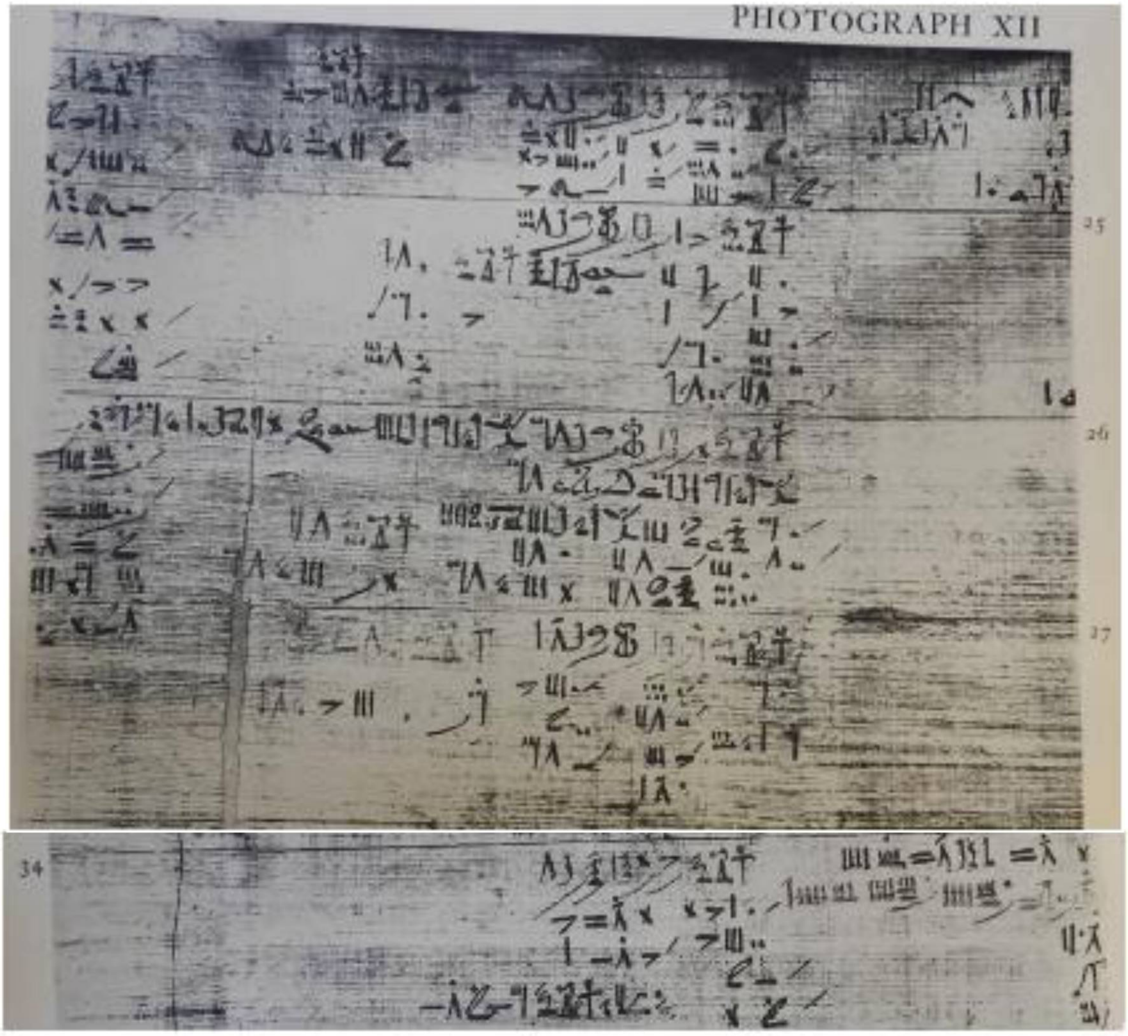
24

25

26

27

34

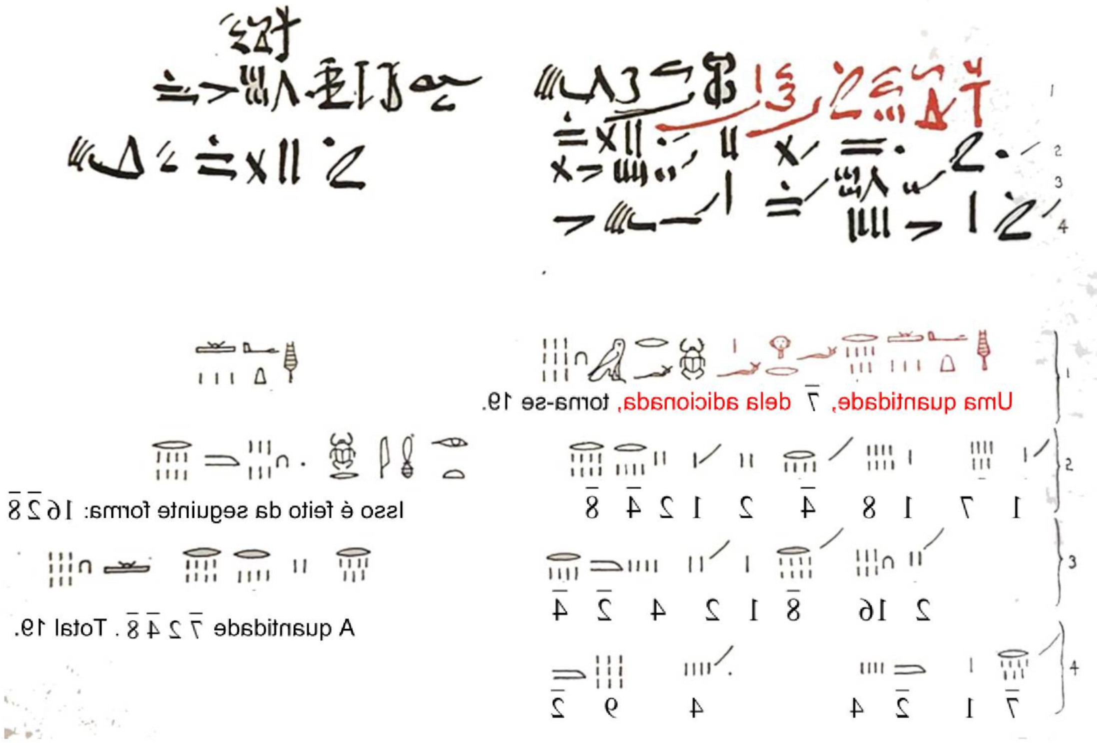


FONTE: Chace, 1929, p. 27 e 30

Inicialmente mostraremos a figura de como o problema era apresentado no papiro de Rhind, com suas escritas em hierático e hieroglífico, e será acrescentado aí a tradução realizada pela autora, que teve como base a transliteração feita por Chace (1929) e Clagett (1999). Esta será mostrada na sequência, seguida da tradução em linguagem matemática do problema e da solução usando matemática moderna.

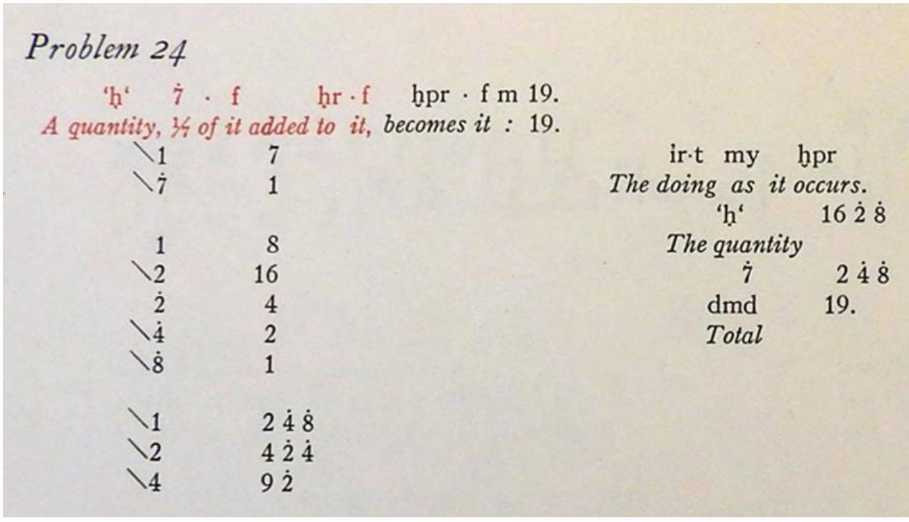
5.2.1 Problema 24

FIGURA 15: PROBLEMA 24 – HIERÁTICO E HIERÓGLIFICO



FONTE: Chace, 1929, plate 47

FIGURA 16: TRANSLITERAÇÃO DO PROBLEMA 24



Problem 24

'h' $\dot{7}$ · f ḥr · f ḫpr · f m 19.
A quantity, 1/7 of it added to it, becomes it : 19.

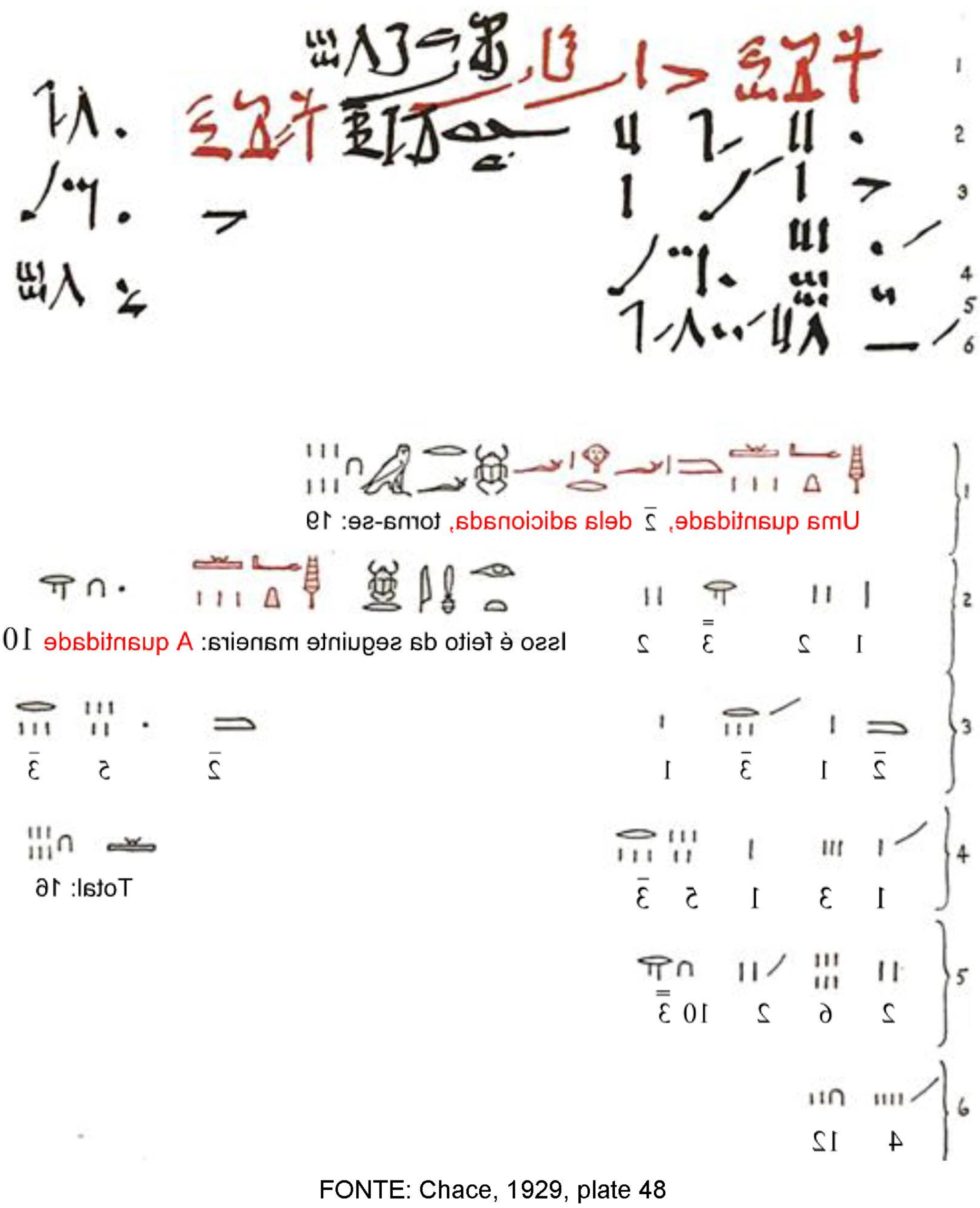
\1	7	ir·t my ḫpr	
\$\dot{7}$	1	*The doing as it occurs.*	
		'h'	16 $\dot{2}$ $\dot{8}$
1	8	*The quantity*	
\2	16	$\dot{7}$	2 $\dot{4}$ $\dot{8}$
$\dot{2}$	4	dmd	19.
\$\dot{4}$	2	*Total*	
\$\dot{8}$	1		
\1	2 $\dot{4}$ $\dot{8}$		
\2	4 $\dot{2}$ $\dot{4}$		
\4	9 $\dot{2}$		

FONTE: Chace, 1929, p.140

No capítulo 4, que trata dos problemas '*aha*' e do método da falsa posição, já foi mostrado a tradução do problema 24 em linguagem matemática e a solução do mesmo fazendo uso da notação em matemática moderna.

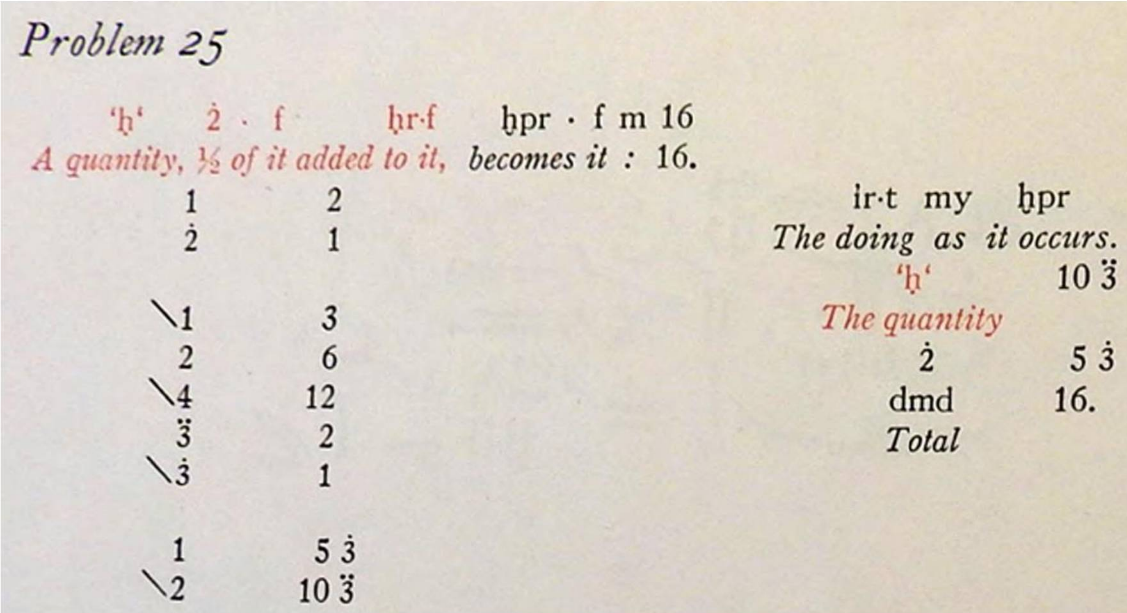
5.2.2 Problema 25

FIGURA 17: PROBLEMA 25 – HIERÁTICO E HIERÓGLIFICO



FONTE: Chace, 1929, plate 48

FIGURA 18: TRANSLITERAÇÃO DO PROBLEMA 25



Problem 25

'ḥ' 2̇ · f ḥr·f ḫpr · f m 16
A quantity, ½ of it added to it, becomes it : 16.

1	2	ir·t my ḫpr	
2̇	1	*The doing as it occurs.*	
		'ḥ'	10 3̈
\1	3	*The quantity*	
2	6	2̇	5 3̇
\4	12	dmd	16.
3̈	2	*Total*	
\3̇	1		
1	5 3̇		
\2	10 3̈		

FONTE: Chace, 1929, p. 142

Para explicar o processo de solução faremos a tradução da transliteração de Chace. Assuma inicialmente que o valor é 2

Fator de multiplicação	Notação de Neugebauer	Número
\ 1	\ 1	2
\ $\frac{1}{2}$	\ $\bar{2}$	1
Total		3.

Daqui chegamos que 2 somado de sua metade é 3, isto é, $2+\frac{1}{2}\times 2=3$. No entanto, procuramos um número que adicionado de sua metade dê 16.

Assim, se encontrarmos um número que multiplicado por 3 resulte 16, podemos multiplicar o primeiro membro da igualdade anterior e o produto deste valor por 2 será a quantidade buscada.

Fator de multiplicação	Notação de Neugebauer	Número
\ 1	\ 1	3
2	2	6
\ 4	\ 4	12
$\frac{2}{3}$	$\bar{\bar{3}}$	2
\ $\frac{1}{3}$	\ $\bar{3}$	1

Total: $5\frac{1}{3} = 5\,\bar{3}$. Continuando o processo,

Fator de multiplicação	Notação de Neugebauer	Número
1	$5\,\bar{3}$	$5\frac{1}{3}$
\ 2	$10\,\bar{\bar{3}}$	$10\frac{2}{3}$

Então, a quantidade é $10\,\bar{\bar{3}} = 10\frac{2}{3} = \frac{32}{3}$ e sua metade é $5\bar{3} = 5\frac{1}{3} = \frac{16}{3}$, que somados fazem 16.

Pelo método da falsa posição iniciaríamos dando um chute inicial x_0. A fim de simplificarmos os cálculos consideramos $x_0 = 2$. Deste modo, x_0 adicionado de sua metade, faria 3, que é o nosso b_0,

$$2 + \frac{1}{2} \times 2 = 3 .$$

Como o valor esperado é 16, precisamos encontrar um número que multiplicado por 3 resulte 16. Portanto, multiplicando ambos os membros da equação acima por $\frac{16}{3} = \frac{b}{b_0}$, chegamos no resultado

$$\left(2\times\frac{16}{3}\right)+\frac{1}{2}\times\left(2\times\frac{16}{3}\right)=3\times\frac{16}{3}=16.$$

Portanto a solução do problema é $x_0\times\frac{b}{b_0}=2\times\frac{16}{3}=\frac{32}{3}.$

Usando a linguagem da matemática moderna, hoje esse problema seria representado pela equação

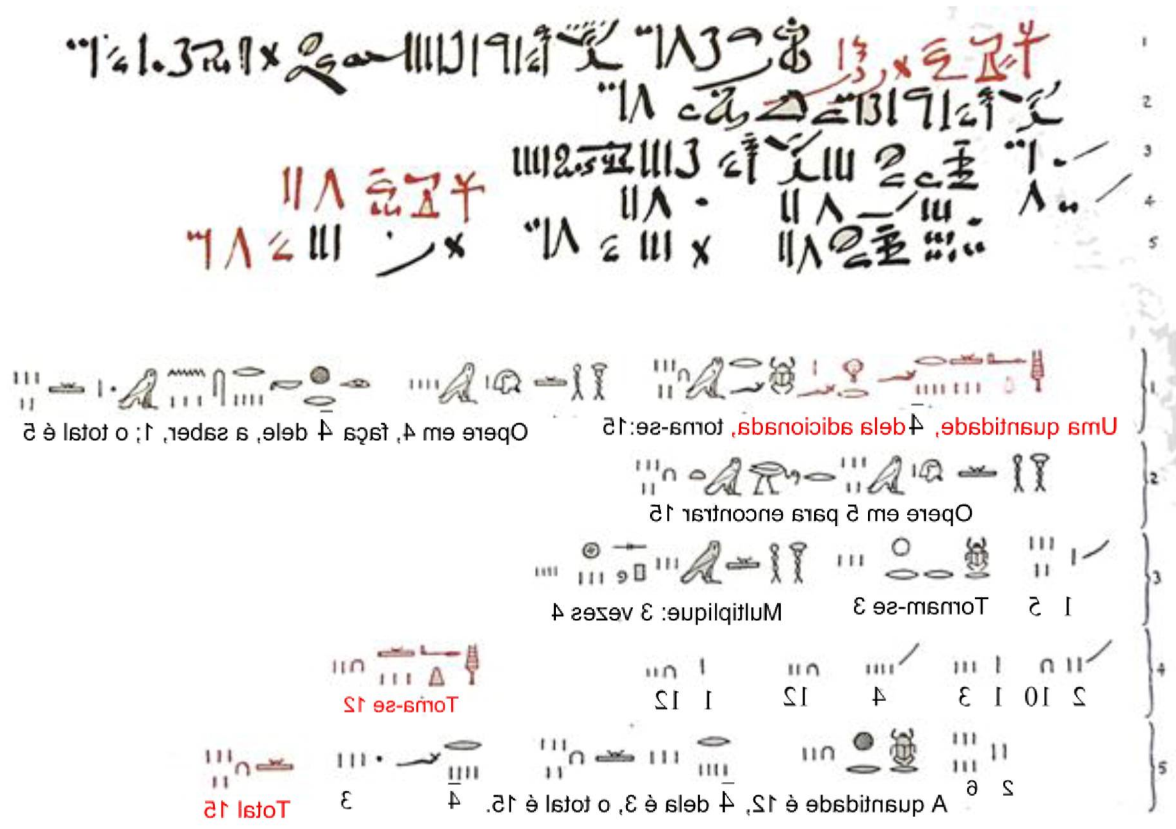
$$x+\frac{1}{2}x=16\,,$$

e a solução,

$$x+\frac{1}{2}x=16\Rightarrow\frac{3}{2}x=16\Rightarrow x=\frac{16\times 2}{3}\Rightarrow x=\frac{32}{3}..$$

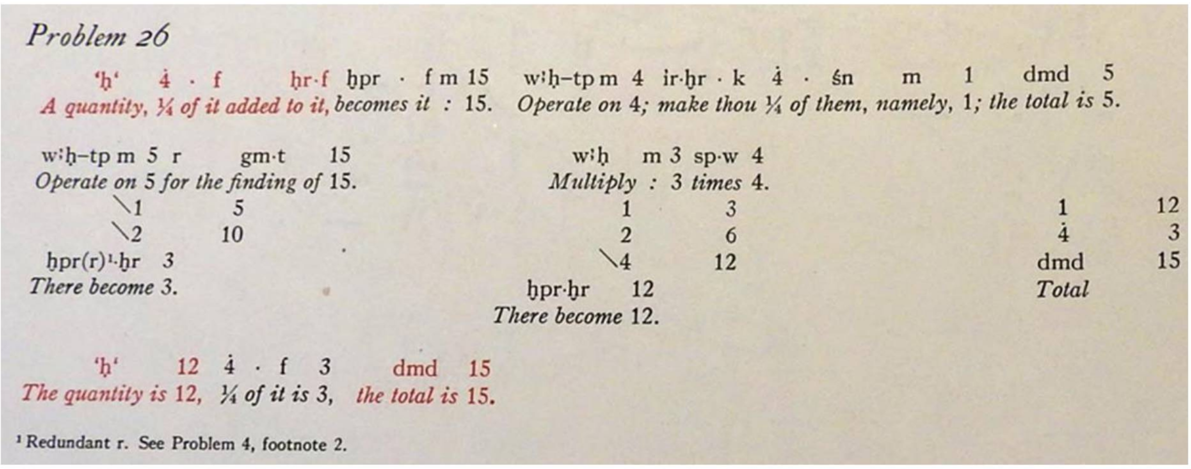
5.2.3 Problema 26

FIGURA 19: PROBLEMA 26 – HIERÁTICO E HIERÓGLIFICO



FONTE: Chace, 1929, plate 49

FIGURA 20: TRANSLITERAÇÃO DO PROBLEMA 26



Problem 26

'ḥ' 4̇ · f ḥr·f ḫpr · f m 15 w:ḥ–tp m 4 ir·ḥr · k 4̇ · śn m 1 dmd 5

A quantity, ¼ of it added to it, becomes it : 15. Operate on 4; make thou ¼ of them, namely, 1; the total is 5.

w:ḥ–tp m 5 r gm·t 15

Operate on 5 for the finding of 15.

\1	5
\2	10

ḫpr(r)[1]·ḥr 3

There become 3.

w:ḥ m 3 sp·w 4

Multiply : 3 times 4.

1	3
2	6
\4	12

ḫpr·ḥr 12

There become 12.

1	12
4̇	3
dmd	15
Total	

'ḥ' 12 4̇ · f 3 dmd 15

The quantity is 12, ¼ of it is 3, the total is 15.

[1] Redundant r. See Problem 4, footnote 2.

FONTE: Chace, 1929, p.144

Inicialmente, na transliteração, admite-se que uma certa quantidade, adicionada de sua quarta parte vale 15. Para tanto, assume como sendo esse valor inicial o número 4.

Fator de multiplicação	Notação de Neugebauer	Número
\ 1	\ 1	4
\ $\frac{1}{4}$	\ $\bar{4}$	1
Total		5

Tomando como chute inicial o 4, temos que $4+\frac{1}{4}\times 4=5$, ou seja, 4 adicionado de sua quarta parte é 5. No entanto, queremos um número que somado ao seu quarto resulte 15. Para isso, vamos em busca de um número que multiplicado por 5 faça 15, este será o número que multiplicado por 4 nos retornará 15, observando a igualdade acima.

Fator de multiplicação	Notação de Neugebauer	Número
\ 1	\ 1	5
\ 2	\ 2	10

O valor procurado é 3. Repetindo o processo, agora multiplique 3 por 4

Fator de multiplicação	Notação de Neugebauer	Número
1	3	3
2	6	6
\ 4	12	12

Logo, a quantidade é 12 e seu quarto é 3, que adicionados chegam em 15.

Com o método da falsa posição tomemos como chute inicial $x_0 = 4$. Deste modo, x_0 adicionado de sua quarta parte, resulta 5, que é o nosso b_0,

$$4 + \frac{1}{4} \times 4 = 5 .$$

Na tentativa de encontrar 15, devemos buscar um número que multiplicado por 5 resulte 15. Portanto, multiplicando ambos os membros da equação acima por $3 = \frac{15}{5} = \frac{b}{b_0}$, conseguimos

$$(4 \times 3) + \frac{1}{4} \times (4 \times 3) = 3 \times 5 = 15.$$

Portanto a solução do problema é $x_0 \times \frac{b}{b_0} = 4 \times 3 = 12.$

Em linguagem atual, esse problema poderia ser representado pela equação

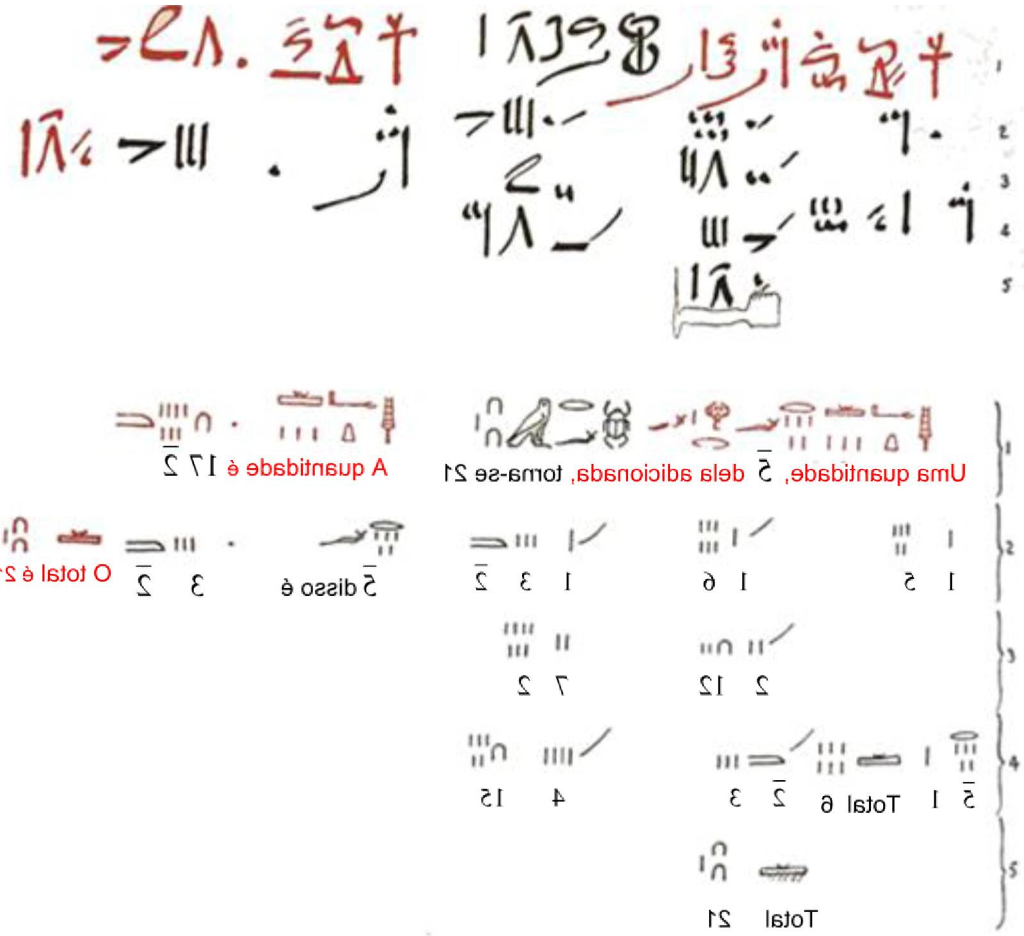
$$x + \frac{1}{4} x = 15 ,$$

e a solução,

$$x + \frac{1}{4} x = 15 \Rightarrow \frac{5}{4} x = 15 \Rightarrow x = \frac{15 \times 4}{5} \Rightarrow x = 12.$$

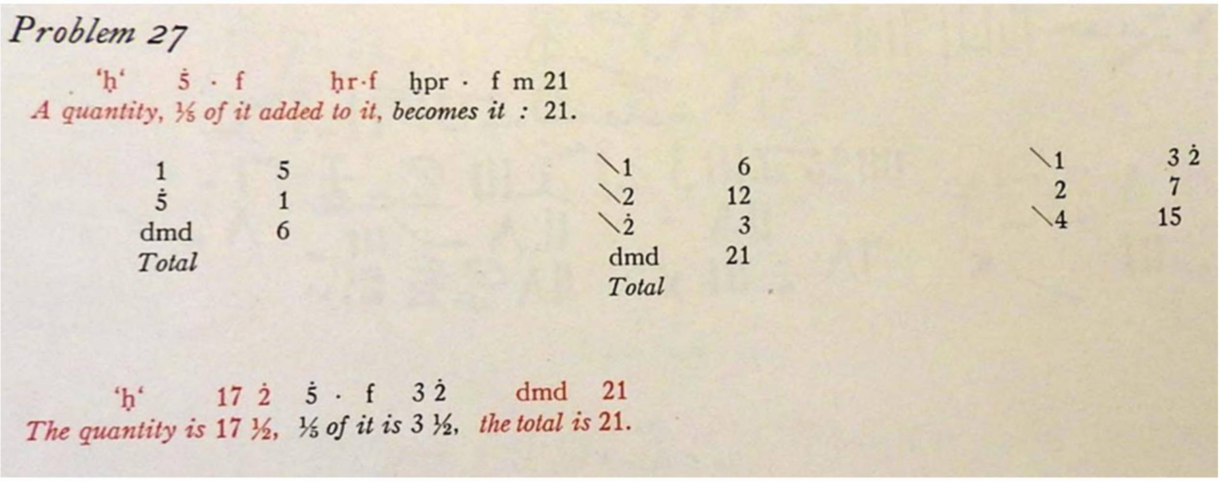
5.2.4 Problema 27

FIGURA 21: PROBLEMA 27 – HIERÁTICO E HIERÓGLIFICO



FONTE: Chace, 1929, plate 50

FIGURA 22: TRANSLITERAÇÃO DO PROBLEMA 27



Problem 27

ḥʿ 5̇ · f ḥr·f ḫpr · f m 21

A quantity, ⅕ of it added to it, becomes it : 21.

1	5	\1	6	\1	3 2̇
5̇	1	\2	12	2	7
dmd	6	\2̇	3	\4	15
Total		dmd	21		
		Total			

ḥʿ 17 2̇ 5̇ · f 3 2̇ dmd 21

The quantity is 17 ½, ⅕ of it is 3 ½, the total is 21.

FONTE: Chace, 1929, p.146

Esse problema, como outros do papiro, apresenta um erro de grafia. Em uma de suas tabelas de multiplicação, o escriba coloca 15 como o dobro de 7, e Chace (1929, p. 146) repete esse valor a fim de preservar a transliteração. Durante a explicação do problema a correção será feita.

Na transliteração, admite-se que uma certa quantidade, somada de sua quinta parte vale 21. Comece com o número 5,

Fator de multiplicação	Notação de Neugebauer	Número
\ 1	\ 1	5
\ $\frac{1}{5}$	\ $\bar{5}$	1

Logo, 5 adicionado de sua quinta parte vale 6. No entanto, o que procuramos é um número que somado ao seu quinto resulte 21. Dando continuidade ao raciocínio anterior, tentaremos encontrar um valor que multiplicado por 6 resulte 21.

Fator de multiplicação	Notação de Neugebauer	Número
\ 1	\ 1	6
\ 2	\ 2	12
\ $\frac{1}{2}$	\ $\bar{2}$	3

Donde encontramos o número $3\frac{1}{2} = 3\,\bar{2}$. Continuando o processo, temos que o produto desse valor e 5 resulta na quantidade procurada.

Fator de multiplicação	Notação de Neugebauer	Número
\ 1	$3\,\bar{2}$	$3\frac{1}{2}$
2	7	7
\ 4	14	14

Na tabela acima temos a correção mencionada no início do problema. Logo, a quantidade é $17\frac{1}{2} = 17\,\bar{2}$ e

Fator de multiplicação	Notação de Neugebauer	Número
\ 1	$17\,\bar{2}$	$17\frac{1}{2}$
\ $\frac{1}{5}$	$3\bar{2}$	$3\frac{1}{2}$
Total:		21.

Com o método da falsa posição tomemos o chute inicial $x_0 = 5$. Logo temos que, x_0 adicionado de seu quinto perfaz 6, que é o nosso b_0,

$$5 + \frac{1}{5}\times 5 = 6.$$

Procurando o resultado 21, vamos buscar um número que multiplicado por 6 dê 21. Portanto, multiplicando ambos os membros da equação acima por $\frac{21}{6} = \frac{b}{b_0}$, conseguimos

$$\left(5\times\frac{21}{6}\right) + \frac{1}{5}\times\left(5\times\frac{21}{6}\right) = \frac{21}{6}\times 6 = 21.$$

Assim, a solução do problema é $x_0 \times \frac{b}{b_0} = 5\times\frac{21}{6} = \frac{105}{6} = 17\frac{1}{2}.$

Usando a linguagem da matemática moderna, o problema seria expresso pela equação

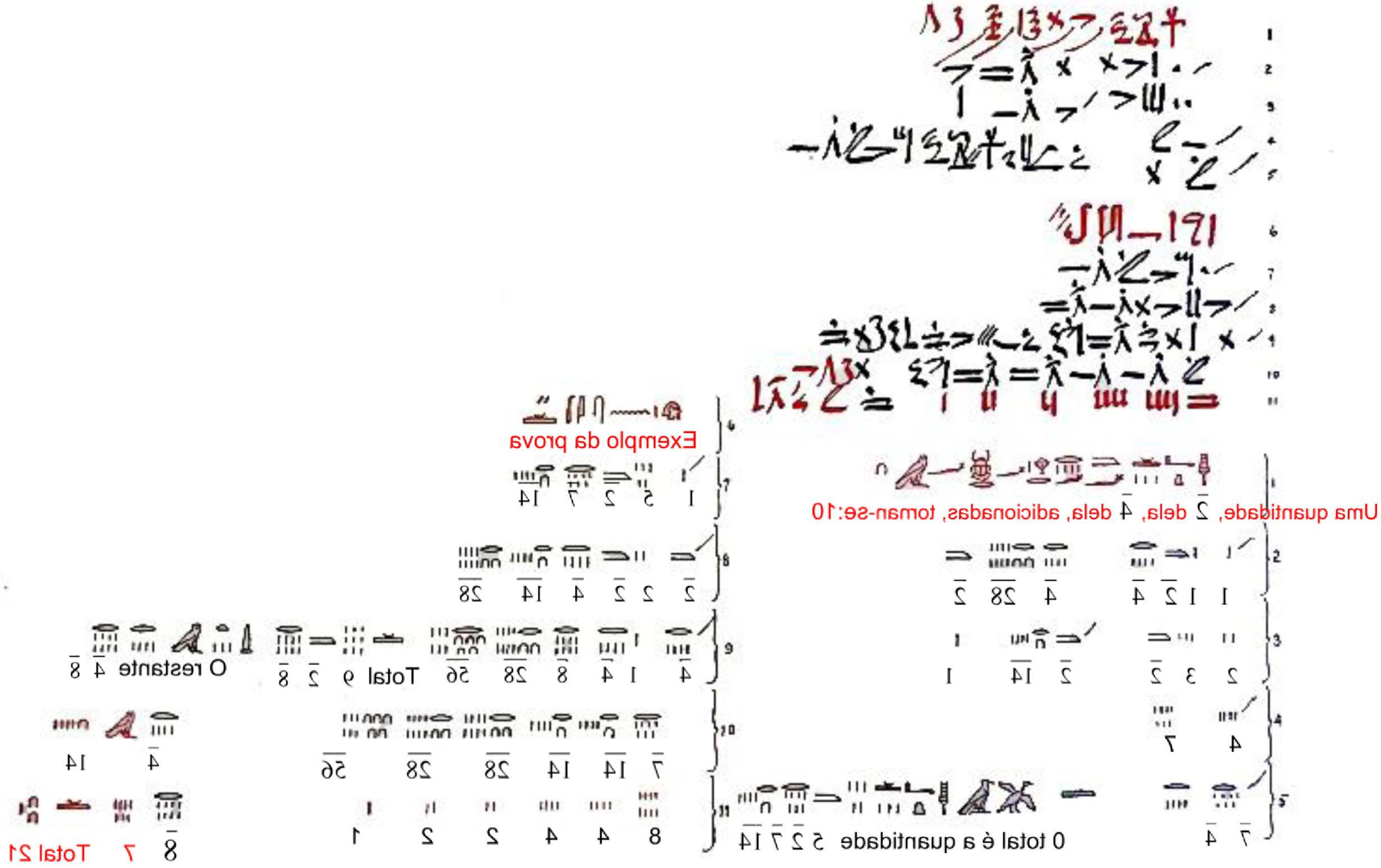
$$x + \frac{1}{5}x = 21,$$

e a solução,

$$x + \frac{1}{5}x = 21 \Rightarrow \frac{6}{5}x = 21 \Rightarrow x = \frac{21\times 5}{6} \Rightarrow x = \frac{105}{6} = 17\frac{1}{2}.$$

5.2.5 Problema 34

FIGURA 23: PROBLEMA 34 – HIERÁTICO E HIERÓGLIFICO



FONTE: Chace, 1929, plate 56

FIGURA 24: TRANSLITERAÇÃO DO PROBLEMA 34

Problem 34

'ḥ' $\dot{2}$ · f $\dot{4}$ · f ḥr·f ḥpr · f m 10

A quantity, ½ of it, ¼ of it, added to it, becomes it : 10.

\\1	1 $\dot{2}$ $\dot{4}$
2	3 $\dot{2}$
\\4	7
\\$\dot{7}$	$\dot{4}$
$\dot{4}$ $\dot{2}8$	$\dot{2}$
\\$\dot{2}$ $\dot{1}4$	1

dmd pꜣ 'ḥ' 5 $\dot{2}$ $\dot{7}$ $\dot{1}4$

The total is the quantity 5 ½ ⅐ 1/14.

tp n šyty

Example of proof.

\\1	5 $\dot{2}$ $\dot{7}$ $\dot{1}4$
\\$\dot{2}$	2 $\dot{2}$ $\dot{4}$ $\dot{1}4$ $\dot{2}8$
\\$\dot{4}$	1 $\dot{4}$ $\dot{8}$ $\dot{2}8$ $\dot{5}6$

dmd 9 $\dot{2}$ $\dot{8}$ ḏꜣ·t m $\dot{4}$ $\dot{8}$

The total is 9 ½ ⅛, *the remainder is* : ¼ ⅛.

$\dot{7}$	$\dot{1}4$	$\dot{1}4$	$\dot{2}8$	$\dot{2}8$	56[1]
8	4	4	2	2	1
$\dot{4}$	m	14			
	:				
$\dot{8}$		7			

dmd

Total 21.

[1] The scribe omitted the fractional dot in this place.

FONTE: Chace, 1929, p. 158

Inicia-se propondo que uma quantidade, a sua metade e o seu quarto, são adicionados e resultam em 10. Qual é essa quantia? Para resolver esse problema o escriba utiliza uma tabela de multiplicação, diferentemente dos anteriores que resolve propondo um valor inicial, e realizando as correções durante o processo, conhecido como método da falsa posição.

Assim, inicie multiplicando $1\frac{1}{2}\frac{1}{4} = 1\,\overline{2}\,\overline{4}$ para obter 10.

Fator de multiplicação	Notação de Neugebauer	Número	Notação de Neugebauer
\ 1	\ 1	$1\frac{1}{2}\frac{1}{4}$	$1\,\overline{2}\,\overline{4}$
2	2	$3\frac{1}{2}$	$3\,\overline{2}$
\ 4	4	7	7
$\backslash\frac{1}{7}$	$\backslash\overline{7}$	$\frac{1}{4}$	$\overline{4}$
$\frac{1}{4}\frac{1}{28}$	$\overline{4}\,\overline{28}$	$\frac{1}{2}$	$\overline{2}$
$\backslash\ \frac{1}{2}\frac{1}{14}$	$\backslash\ \overline{2}\,\overline{14}$	1	1

Portanto, observando que $1\frac{1}{2}\frac{1}{4}+7+\frac{1}{4}+1=10$, a quantia procurada é $5\frac{1}{2}\frac{1}{7}\frac{1}{14}=5\,\overline{2}\,\overline{7}\,\overline{14}$.

O escriba realiza nesse problema um modelo de prova do resultado:

Fator de multiplicação	Notação de Neugebauer	Número	Notação de Neugebauer
\ 1	\ 1	$5\frac{1}{2}\frac{1}{7}\frac{1}{14}$	$5\,\overline{2}\,\overline{7}\,\overline{14}$
$\backslash\ \frac{1}{2}$	$\backslash\ \overline{2}$	$2\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{14}\frac{1}{28}$	$2\,\overline{2}\,\overline{4}\,\overline{14}\,\overline{28}$
$\backslash\ \frac{1}{4}$	$\backslash\ \overline{4}$	$1\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{28}\frac{1}{56}$	$1\,\overline{4}\,\overline{8}\,\overline{28}\,\overline{56}$

Os números inteiros e a frações mais simples (potências de ½) fazem um total de $9\frac{1}{2}\frac{1}{8}=9\,\overline{2}\,\overline{8}$; o restante é $\frac{1}{4}=\overline{4}$ e $\frac{1}{8}=\overline{8}$. As frações restantes, ou seja,

$$\frac{1}{7} \quad \frac{1}{14} \quad \frac{1}{14} \quad \frac{1}{28} \quad \frac{1}{28} \quad \frac{1}{56}$$

aplicadas a 56, são iguais a

$$8 \quad 4 \quad 4 \quad 2 \quad 2 \quad 1$$

fazendo o total de 21, enquanto $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$, aplicados a 56, fazem 14 e 7, e também 21. Assim sendo, o resultado obtido é correto.

Analisando de outra forma, a soma do valor procurado, com sua metade e seu quarto,

$$\begin{aligned}
&5+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}=\\
&=9+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}\\
&=9+\frac{2+2+1}{8}+\frac{8+4+4+2+2+1}{56}\\
&=9+\frac{5}{8}+\frac{3}{8}=10.
\end{aligned}$$

Com o método da falsa posição tomemos o chute inicial $x_0=4$. Logo, temos que x_0 adicionado de sua metade e seu quarto faz 7, que é o nosso b_0,

$$4+\frac{1}{2}\times 4+\frac{1}{4}\times 4=7.$$

Procurando o resultado 10, vamos buscar um número que multiplicado por 7 dê 10. Seguindo as ideias do método, multiplicamos ambos os membros da equação acima por $\frac{b}{b_0}=\frac{10}{7}$, donde temos

$$\left(4\times\frac{10}{7}\right)+\frac{1}{2}\times\left(4\times\frac{10}{7}\right)+\frac{1}{4}\left(4\times\frac{10}{7}\right)=\frac{10}{7}\times 7=10.$$

Portanto, a solução do problema é $x_0\times\frac{b}{b_0}=4\times\frac{10}{7}=\frac{40}{7}=5\frac{1}{2}\frac{1}{7}\frac{1}{14}$.

Em linguagem matemática moderna, o problema seria representado pela equação

$$x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x=10,$$

e a solução,

$$x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x=10\Rightarrow\frac{7}{4}x=10\Rightarrow x=\frac{40}{7}.$$

Com a exploração de alguns problemas podemos ver que a forma de resolução foi sendo aprimorada, não se perdendo a essência, mas simplificando as notações e métodos.

6 CONEXÕES COM A SALA DE AULA

Falar de história da matemática em sala de aula é oferecer aos estudantes a possibilidade de conhecer um pouco da construção do pensamento matemático, observar que a matemática não é estática, está em constante evolução. Que é fruto de descoberta, da necessidade, que está quase sempre atrelada a contextos sociais e políticos. Nesse sentido,

> Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns "porquês" e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento. Assim, a própria história dos conceitos pode sugerir caminhos de abordagem deles, bem como os objetivos que se pretendem alcançar com eles. (BRASIL, 1998, p. 43).

Segundo Mendes,

> ...as atividades históricas devem ser elaboradas de modo a imprimir maior significação à matemática escolar, pois o conhecimento histórico pode estar implícito nos problemas suscitados na atividade ou explícito nos textos históricos resgatados de fontes primárias (textos originais, documentos ou outros artefatos históricos) ou secundárias (informações de livros de História da Matemática ou de livros paradidáticos). A utilização dessas atividades históricas no ensino da matemática pressupõe que a participação efetiva do aluno na construção de seu conhecimento em sala de aula constitui-se em um aspecto preponderante nesse procedimento de ensino e aprendizagem. (MENDES, 2008, p. 40 e 41)

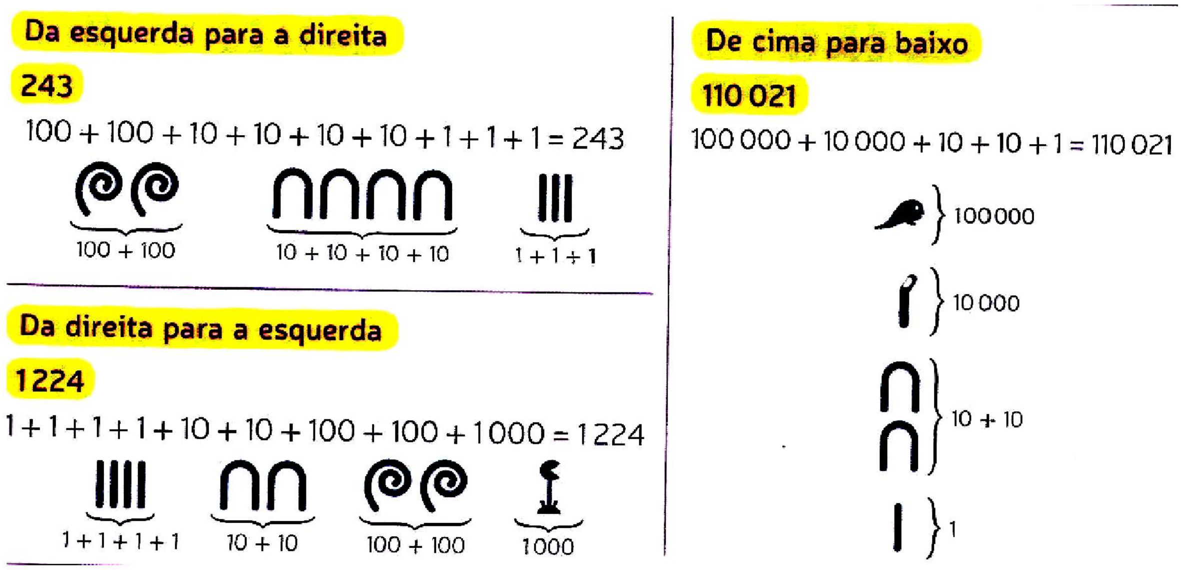
A História da Matemática apresenta-se como mais uma proposta metodológica e vem se consolidando, ao longo dos anos, como uma área de investigação da Educação Matemática. Conforme D'Ambrósio (1996, p. 30) "conhecer, historicamente, pontos altos da matemática de ontem poderá, na melhor das hipóteses, e de fato faz isso, orientar no aprendizado e no desenvolvimento da matemática de hoje".

Desse modo, a matemática aparece mais contextualizada, mostrando um saber construído, dando significação aos processos de resolução, as ferramentas e métodos utilizados, além das mudanças ocorridas com os mesmos. Isso tudo desperta nos estudantes a curiosidade e motivação, aumentando seu interesse e trazendo reflexos no ensino e aprendizagem.

6.1 O PENSAMENTO EGÍPCIO

Alguns fatores fazem com que o sistema de numeração egípcio seja um dos mais presentes nos livros didáticos. Dentre eles, podemos destacar o fato de, assim como no sistema indo arábico, possuir base decimal, ou seja, realizavam a troca de seus símbolos somente após se completar dez repetições. O princípio aditivo também se assemelha ao nosso sistema, o que traz um certo conforto para apresentá-lo em sala. Esses fatores fazem com que o sistema de numeração egípcio seja de simples compreensão pelos estudantes, que aproveitam para levantar questionamentos relacionados principalmente a desvantagem de se expressar grandes valores.

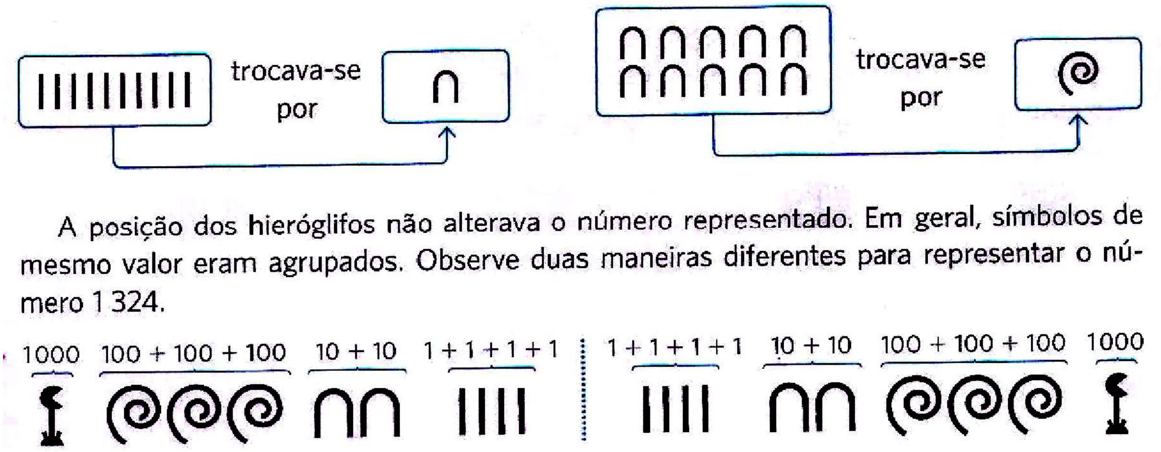
FIGURA 25: ESCRITA DOS NÚMEROS



FONTE: Pataro, 2018, p. 31

Quando se propõem atividades em sala de aula envolvendo outro sistema de numeração cria-se a oportunidade de se conhecer melhor as características do nosso sistema. Um exemplo disso é a escrita de um número do sistema indo arábico para o egípcio que permite o trabalho sistematizado com a decomposição.

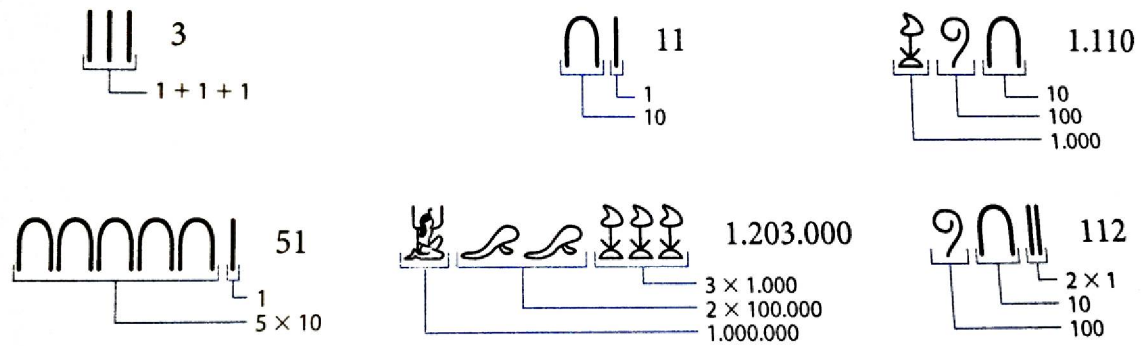
FIGURA 26: SISTEMA DECIMAL



FONTE: Chavante, 2015, p. 11

Normalmente os números eram escritos do maior para o menor ou do menor para o maior, sendo incomum encontrar alguma outra ordem.

FIGURA 27: DECOMPOSIÇÃO



FONTE: Projeto Araribá, 2014, p. 18

Essas e outras questões abordadas nas aulas enriquecem o aprendizado e vem de encontro as competências específicas de matemática apresentadas na Base Nacional Comum Curricular, principalmente no que diz respeito a

> 1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
> 2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.

> 3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. (BRASIL, 2018, p. 265).

As dez competências gerais para a Educação Básica, a serem desenvolvidas pelos alunos, também destacam que é necessário

> 1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
> 2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
> 6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade. (BRASIL, 2018, p. 9).

Tendo em vista esses fatores, percebemos que o trabalho com a história apresenta possibilidades e a inclusão de novas metodologias, colocando o aluno como centro do seu processo de ensino e aprendizagem.

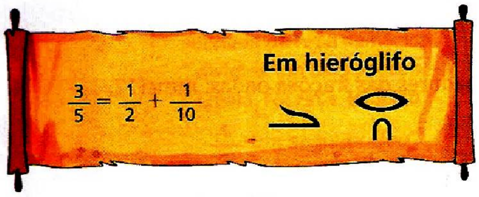
Os livros didáticos trazem, para o professor, sugestões de leituras complementares e vídeos que podem ser explorados durante as aulas. Também já mostram qual a habilidade da BNCC que está sendo desenvolvida. Contemplam propostas de trabalho interdisciplinares, relacionando os saberes e as competências abordadas. Sugerem atividades e jogos que chamam a atenção para comparações que podem ser realizadas tomando como base a história da matemática.

Também encontramos nos livros didáticos algumas considerações a respeito das frações unitárias, onde se mostra como eram escritas e algumas conversões realizadas utilizando a tabela do Papiro de Rhind para as frações da forma $\frac{2}{p}$.

FIGURA 28: FRAÇÕES EGÍPCIAS

Veja no quadro como os antigos egípcios representavam algumas frações.

Observe, agora, um exemplo de como eles representavam a fração $\frac{3}{5}$. Esta era decomposta do seguinte modo:



Nesse caso, $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{10}$ são frações unitárias. Essa é a maneira como no Papiro de Rhind é apresentada a decomposição de frações. Isso também aparece em textos matemáticos de períodos anteriores. Também encontramos nesse papiro $\frac{2}{7}$ escrito como $\frac{1}{4} + \frac{1}{28}$.

A única exceção para esse procedimento era a fração $\frac{2}{3}$. A princípio, deveríamos esperar a decomposição de $\frac{2}{3}$ em $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$, assim como $\frac{3}{4}$ decompõe-se em $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

Entretanto, os egípcios tinham curiosamente um único símbolo para $\frac{2}{3}$: ou ou

Os gregos desenvolveram, entre a época da escrita do Papiro de Rhind e o início da era cristã, um bom sistema de frações. No entanto, eles foram influenciados pela técnica egípcia de manipular frações. Por exemplo, o matemático grego Heron (século I d.C.) seguiu a tradição egípcia, usando as tabelas do Papiro de Rhind escritas 2.000 anos antes, o que mostra a força da

tradição egípcia no tratamento de frações.

As tradições babilônicas, assim como as egípcias e chinesas, encontram seus caminhos nos textos árabes, nos quais ocorre uma síntese dessas várias aritméticas.

Assim, após o desenvolvimento da noção de frações unitárias, surge gradualmente a ideia de fração geral entre números naturais, na qual o numerador não deve necessariamente ser 1. Então, abandona-se progressivamente o sistema de frações herdado da Antiguidade e assume-se um outro, no qual, graças à adoção dos algarismos indo-arábicos, as frações passam a ser escritas de uma nova maneira e entram na prática diária das universidades e do comércio.

FONTE: Bianchini, 2011, p. 182

Mais do que exemplificar o sistema de numeração egípcio com símbolos e representações, o professor pode usar esse conhecimento para mostrar outras maneiras de se realizar uma mesma operação, como a adição de frações ou os processos utilizados pelos egípcios para o cálculo de multiplicações e divisões.

Neste trabalho nos dedicamos, em especial, a falar de alguns problemas '*aha*'. Observa-se com certa frequência que ao iniciar o trato com as equações ou como uma seção especial, aparecem nos livros didáticos comentários a cerca desses problemas. Tais problemas eram oriundos de situações reais, divisão de alimentos, heranças, etc. Esse fato pode ser ressaltado durante as aulas como forma de exemplificação e uso das equações desde os tempos mais remotos. D'Ambrósio (1996, p. 18) ressalta que, "ao longo da história se reconhecem esforços de indivíduos e de todas as sociedades para encontrar explicações, formas de lidar e conviver com a realidade natural e sociocultural". E ainda reforça que "todo conhecimento é resultado de um longo processo cumulativo de geração, de organização intelectual, de organização social e de difusão, naturalmente não dicotômicos entre si". (D'AMBRÓSIO, 1996, p. 18).

Na sequência temos o recorte de um livro didático que fala um pouco de como os egípcios já trabalhavam com equações.

FIGURA 29: UM POUCO DA HISTÓRIA DAS EQUAÇÕES

Vamos exemplificar o estilo verbal com a Matemática do Egito, na qual encontramos vários problemas de caráter algébrico, nos quais a incógnita era chamada de *aha*, palavra que pode ser traduzida como "monte" ou "quantidade". O primeiro problema com *aha* do papiro Rhind (datado de cerca de 1750 a.C.) — a fonte mais rica em informações sobre a matemática do Egito antigo — é o de número 24. Esse problema pede o valor de *aha*, informando que "a soma de *aha* com sua sétima parte é 19". Com a notação algébrica moderna esse problema pode ser equacionado assim: $x + \frac{x}{7} = 19$, em que x representa *aha* (quantidade incógnita).

Os egípcios utilizavam um método que consistia em experimentar um valor para *aha* e, depois, fazer um ajustamento adequado para chegar ao valor procurado. Observe os passos da resolução dada pelo escriba, em notação atual:

- Atribua o valor 7 a *aha*. Verifica-se que $7 + \frac{7}{7} = 8$ e, portanto, a solução tentada não é a correta.
- Divida 19 (valor que precisaria ser encontrado) por 8 (resultado encontrado); o resultado é $\frac{19}{8}$.
- *Aha* é o produto $= 7 \times \frac{19}{8} = \frac{133}{8}$ (correto).

Por fim, o escriba tirava a prova.

FONTE: Iezzi, 2009, p. 209

Nesse mesmo relato o livro fala do método da falsa posição, usado posteriormente, e de al-Khowarizmi, que por volta do ano 825 teria escrito um livro que teve grandes contribuições no desenvolvimento da Álgebra apresentando técnicas de resolução de equações. Também cita François Viète (1540-1603) como o primeiro matemático a usar letras para indicar constantes e incógnitas e René Descartes (1596-1650) como o matemático a sistematizar a representação das equações da forma com que usamos hoje.

Além da parte histórica, pode-se observar também nos livros didáticos, exercícios propondo que se use o método da falsa posição ou dada a equação se crie um problema associado a ela ou ainda dado um problema como no Papiro de Rhind, se escreva a equação e encontre a solução.

Observando as coleções de livros didáticos podemos notar que, em sua maioria, existem abordagens relacionadas a história da matemática, em diferentes contextos e com conteúdos variados. Aqui apresentamos alguns modelos, que foram convenientes por tratarem da temática desenvolvida durante o trabalho.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Procuramos desenvolver alguns procedimentos matemáticos encontrados no Papiro de Rhind, que se mostraram importantes na análise dos problemas '*aha*'. Para isso descrevemos o panorama histórico e geográfico, a evolução da linguagem no Antigo Egito também teve uma importância significativa em nossa tentativa de reconstrução de processos matemáticos utilizados pelos egípcios na época da escrita desse documento, com a decifração dos hieróglifos.

O sistema de numeração, os métodos de multiplicação e divisão egípcia, as frações unitárias bem como o método de Fibonacci, foram explorados para trabalhar com frações unitárias, um dos focos dos processos de raciocínio egípcio. Demonstramos resultados relacionados as frações unitárias e utilizamos a tabela de conversões contida no papiro para escrever frações da forma $\frac{2}{p}$, com p ímpar, entre 5 e 101, como soma de frações unitárias. Esses conceitos tiveram papel primordial na resolução dos problemas '*aha*' 24 a 27 e 34 do papiro de Rhind, que analisamos.

Observamos que o modo de resolução apresentado pelo escriba é uma verificação dos resultados descritos nos problemas da falsa posição. Nós, por outro lado, tentamos reconstruir um possível raciocínio do escriba, tomando as ferramentas disponíveis à matemática egípcia, para resolução dos problemas '*aha*' que estudamos.

Embora o objetivo do trabalho não seja apresentar construções para sala de aula, mas sim analisar a estrutura matemática de alguns problemas '*aha*', cremos que o uso da história da matemática pode proporcionar significativo ganho ao professor, observando e propondo diferentes formas de pensamento nas construções numéricas e algébricas. Essa metodologia mostra-se um meio enriquecedor, dado seu caráter interdisciplinar. Com ela, o professor tem a oportunidade de trazer ao estudante uma análise de problemas e técnicas vivenciados em outros períodos históricos.

Outro argumento para se utilizar a história, em sala de aula, é quando esta é vista como instrumento de compreensão, significação e resolução de problemas, uma vez que promove a busca de elementos esclarecedores das teorias e conceitos matemáticos a serem estudados. Utilizar técnicas e métodos milenares em algumas explicações simples em sala levam o estudante a refletir sobre a sofisticação do pensamento egípcio e de outros povos.

A inclusão de textos históricos que abordam temáticas diferenciadas, como a vida e obra de matemáticos, a origem e significado de termos matemáticos, curiosidades, cálculos, entre outros, parece muito relevante, tendo em vista o despertar do interesse do aluno. Infelizmente nota-se que em alguns livros didáticos as referências históricas não contribuem para o enriquecimento pedagógico, tendo em vista que se apresentam apenas como ornamentos, e que às vezes, são esquecidas de serem exploradas pelos próprios professores.

É necessário que se entenda o papel da história da matemática na construção do conhecimento matemático, e que, portanto, deve ser utilizado como fonte de investigação e reconstrução dos conhecimentos historicamente produzidos. Os aspectos históricos aliados às atividades de ensino e a aprendizagem reforçam um caráter construtivo e favorável à compreensão dos conteúdos matemáticos, fazendo com que os alunos entendam o caráter investigativo presente na origem, organização e disseminação desses conteúdos ao longo do seu percurso histórico.

Além disso, propostas de trabalho que podem fazer conexões com outras áreas do conhecimento, como conceitos históricos, geográficos e culturais sempre trazem experiências enriquecedoras. Explorar construções de materiais é outro fator que agrega valor as atividades, conhecer como eram feitos os papiros, ou materiais utilizados pelos egípcios como o cúbito pode ser um convite a investigação de outros assuntos.

REFERÊNCIAS

ALLEN, G. Donald. **The History of Egyptian Mathematics.** Disponível em: <https://www.math.tamu.edu/%7Edallen/masters/hist_frame.htm>. Acesso em: 17 de dez. 2018.

ALMEIDA, A., CORRÊA, F. **O Papiro de Rhind e as Frações Unitárias**. In MEC/SEB: Explorado o Ensino da Matemática – Artigos: Vol. I. Brasilia: Editora do MEC, 2004. p. 61-67.

ANGLIN, W. S. **Mathematics: A Concise History and Philosophy.** New York: Springer Verlag, 1994.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática: Bianchini / Edwaldo Bianchini**. 8 ed. São Paulo: Moderna, 2015. Vol 1.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

_________. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental - matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. 2. ed. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda., 2002.

BRÉHAMET, Liomet. **Remarks on the Egyptian 2/D table in favor of a global approach (D primenumber)**, arXiv:1403.5739 [math.HO] (2014).

CHACE, Arnold Buffum. **The Rhind Mathematical Papyrus.** Vol. 1. Oberlin, Ohio: Mathematical Association of America, 1927.

__________________. **The Rhind Mathematical Papyrus.** Vol. 2. Oberlin, Ohio: Mathematical Association of America, 1929.

CLAGETT, Marshall. **Ancient Egyptian Science - A Source Book**. Vol 3. Philadelphia: American Philosophical Society, 1999.

CHAVANTE, Eduardo Rodrigues. **Convergências, 6º ano: anos finais: ensino fundamental**. 1º ed. São Paulo: Edições SM, 2015.

D'AMBRÓSIO, Ubiritan. **Educação matemática: Da teoria à prática**. Campinas, SP: Papirus, 1996.

DOBERSTEIN, Arnold Walter. **O Egito Antigo**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2010. Disponível em: <http://www.pucrs.br/edipucrs/oegitoantigo.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2019.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

IEZZI, Gelson. **Matemática e Realidade: 7º ano / Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Antonio Machado**. 6 ed. São Paulo: Atual, 2009.

IFRAH, Georges, 1947. **História universal dos algarismos, volume I: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo.** Tradução de Alberto Munoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

IMHAUSEN, A. Egyptian Mathematics. In KATZ, V. (Ed). **The mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam**: a sourcebook. Princeton: Princeton University Press, 2007.

MENDES, Iran Abreu. Tendências metodológicas no ensino da matemática. Belém: EdUFPA, 2008.

MIATELLO, Luca. **The difference 5 1/2 in a problem of rations from the Rhind mathematical papyrus**. Science Direct. 4 ed., p. 277-284.

PATARO, Patricia Moreno. **Matemática essencial 6ºano: ensino fundamental, anos finais / Patricia Moreno Pataro, Rodrigo Balestri.** São Paulo: Scipione, 2018.

PROJETO araribá: matemática / organizadora Editora Moderna; obra coletiva, concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editora executiva Mara Regina Garcia Gay. 4 ed. São Paulo: Moderna, 2014.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: Uma visão crítica desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, T. PITOMBEIRA, J. B. **Tópicos da História da Matemática**. SBM, 2012 (Coleção PROFMAT).

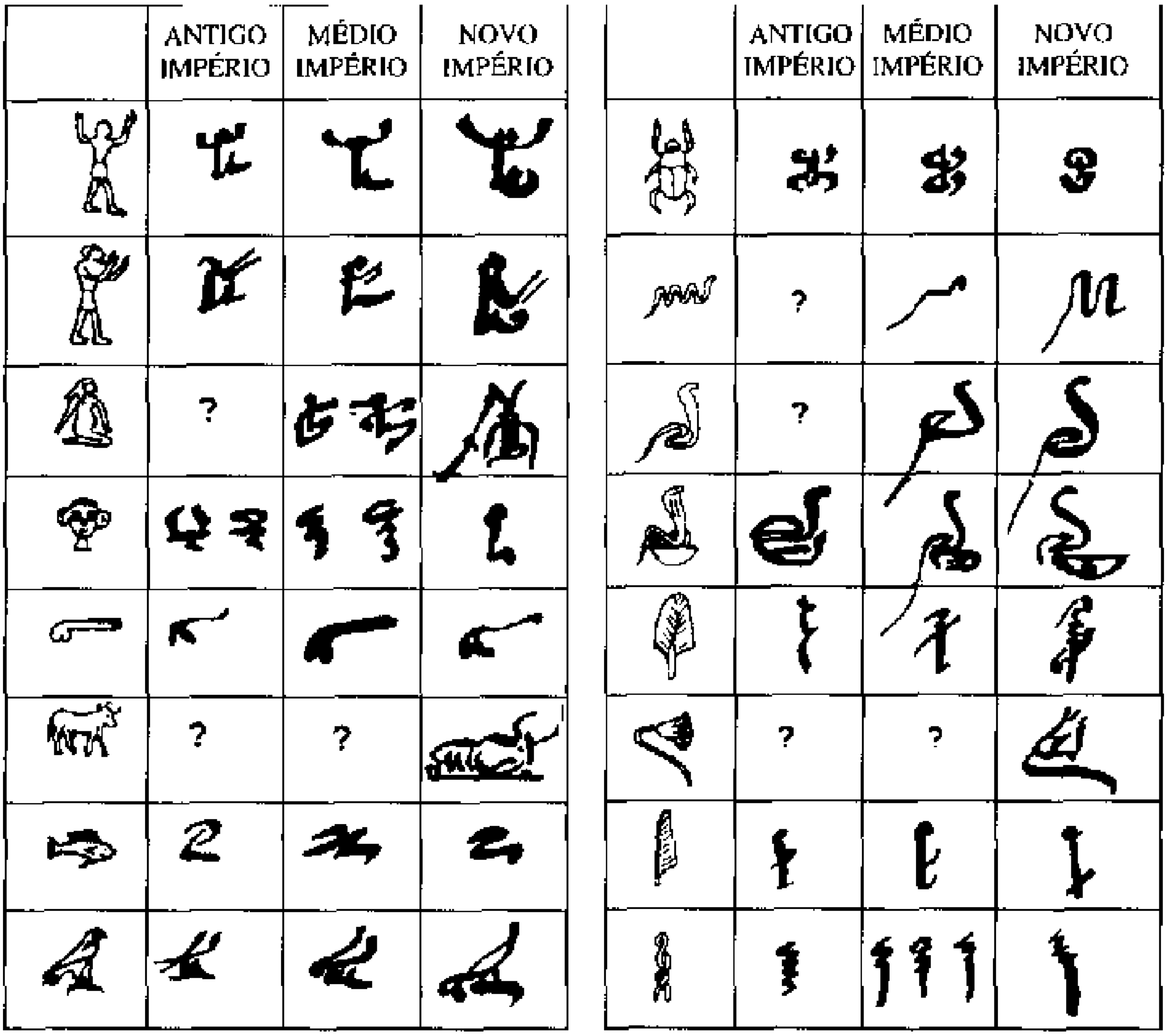
STEFFENON, Rogério Ricardo. **Belos Problemas – Indução e Princípio das Gavetas de Dirichlet.** 1 ed. Rio de Janeiro: IMPA/UFRJ, 2016. Disponível em: <http://www.im.ufrj.br/walcy/Bienal/textos/BELOS%20PROBLEMAS.pdf>. Acesso em: 21 fev. 2019.

Van der WAERDEN, B. **Science Awakening**. 4th edition. Dordrecth: Kluwer Academic Publishers, 1975

ANEXO – ESCRITA: HIEROGLÍFICA X HIERÁTICA

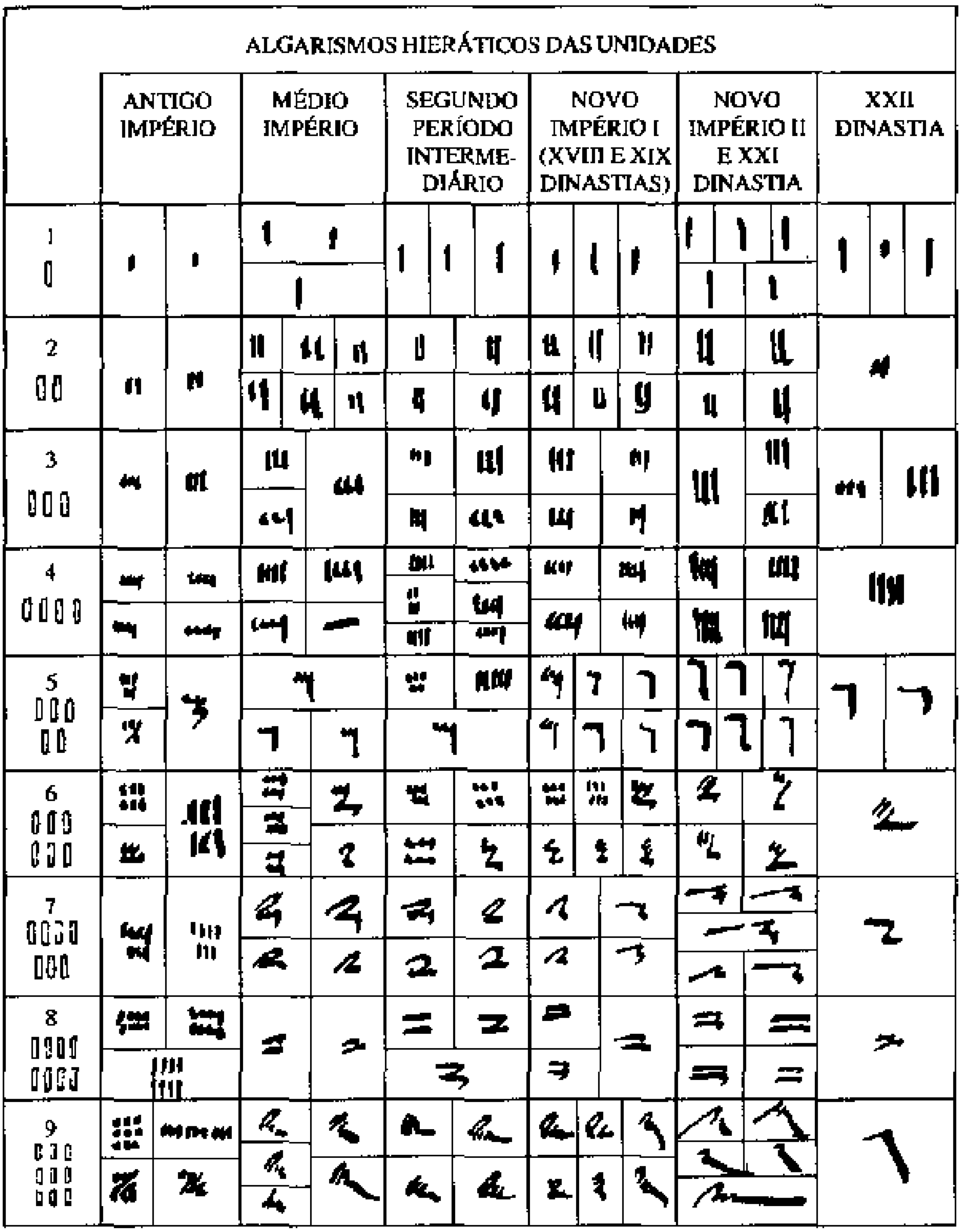
Abaixo seguem as tabelas encontradas em Ifrah (1997) com a notação egípcia no sistema hieroglífico e na notação hierática, usada mais frequentemente pelos escribas.

FIGURA 30: ESCRITA HIERÁTICA



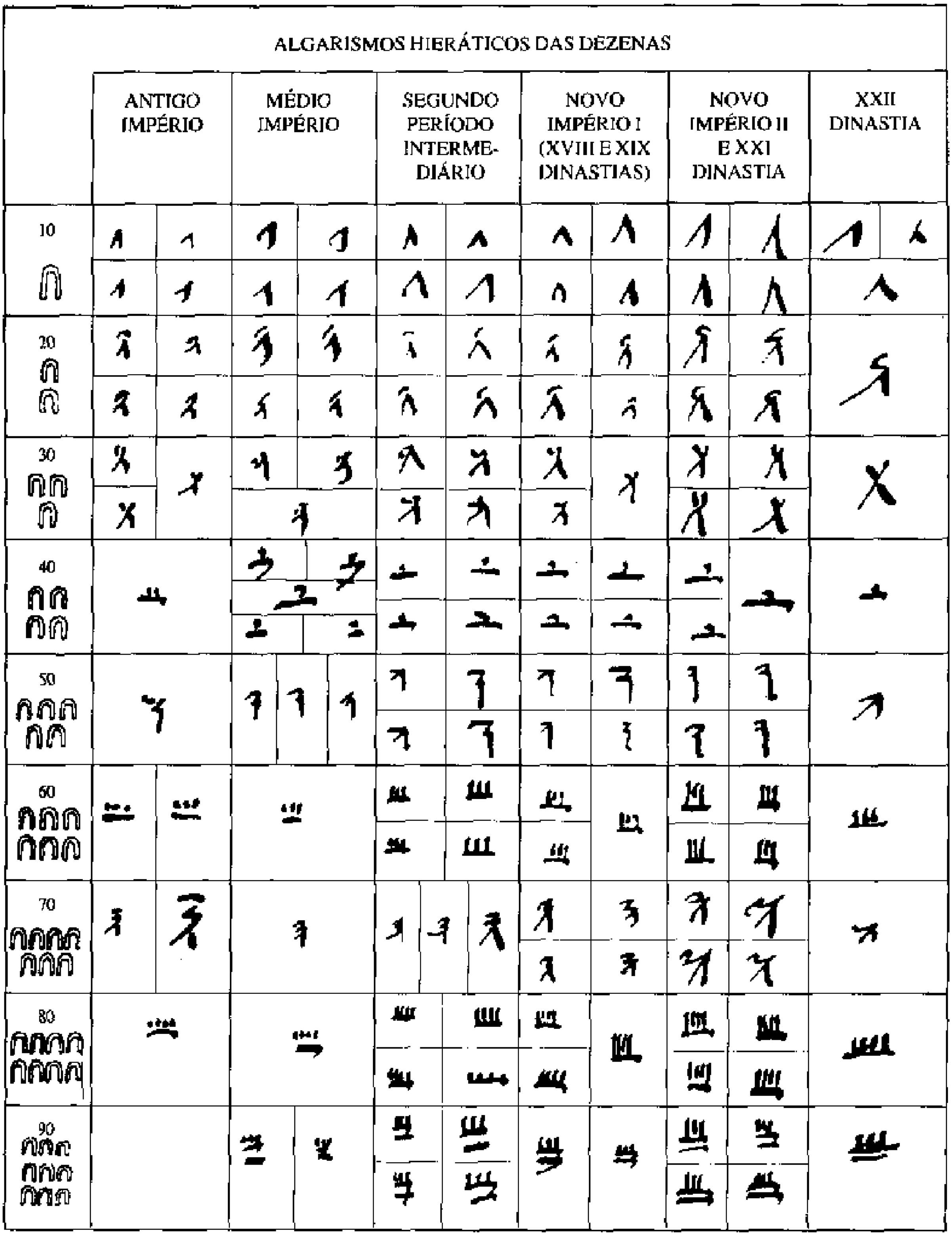
FONTE: Ifrah, 1997, p. 356

FIGURA 31: ALGARISMOS HIERÁTICOS DAS UNIDADES



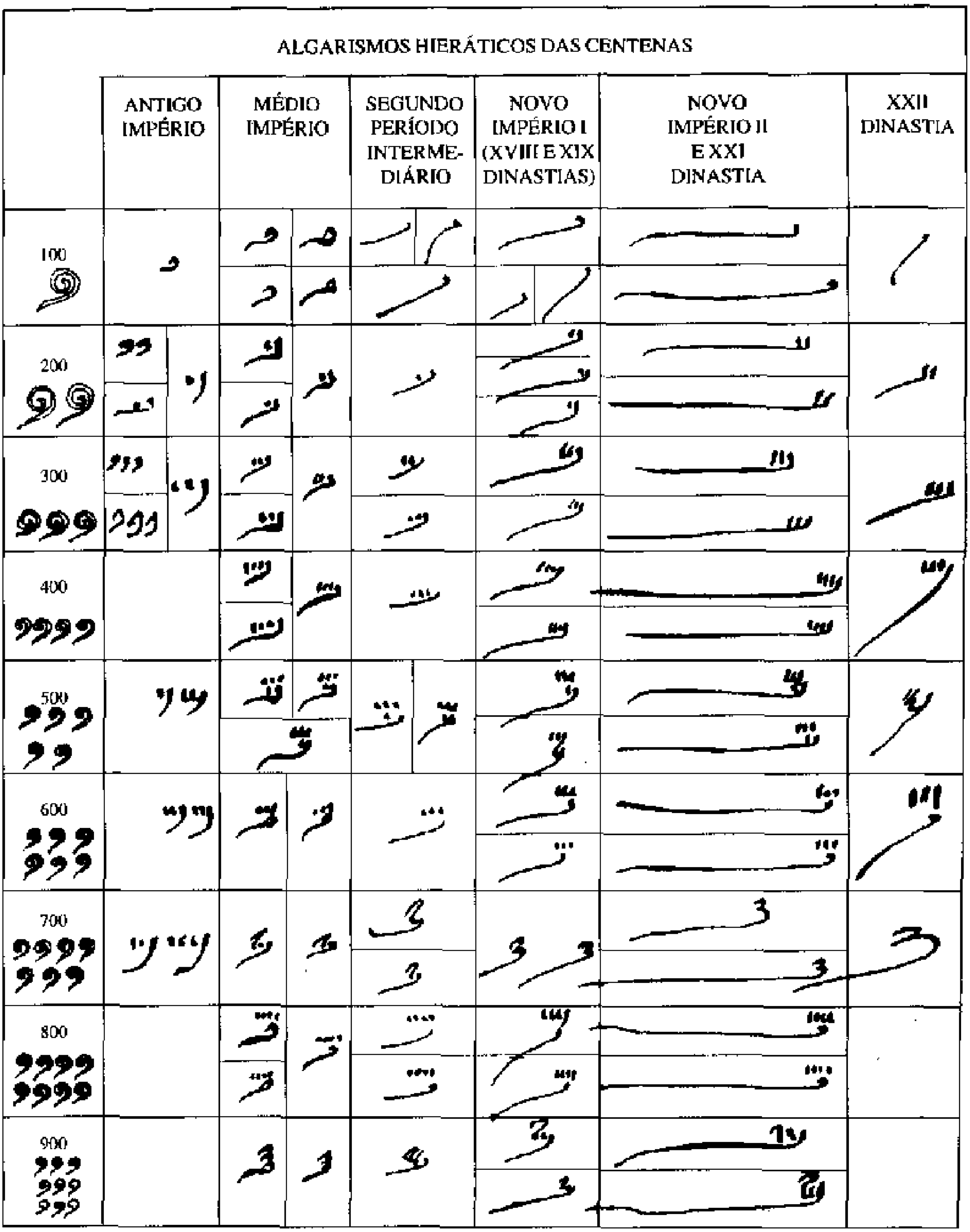
FONTE: Ifrah, 1997, p. 360

FIGURA 32: ALGARISMOS HIERÁTICOS DAS DEZENAS



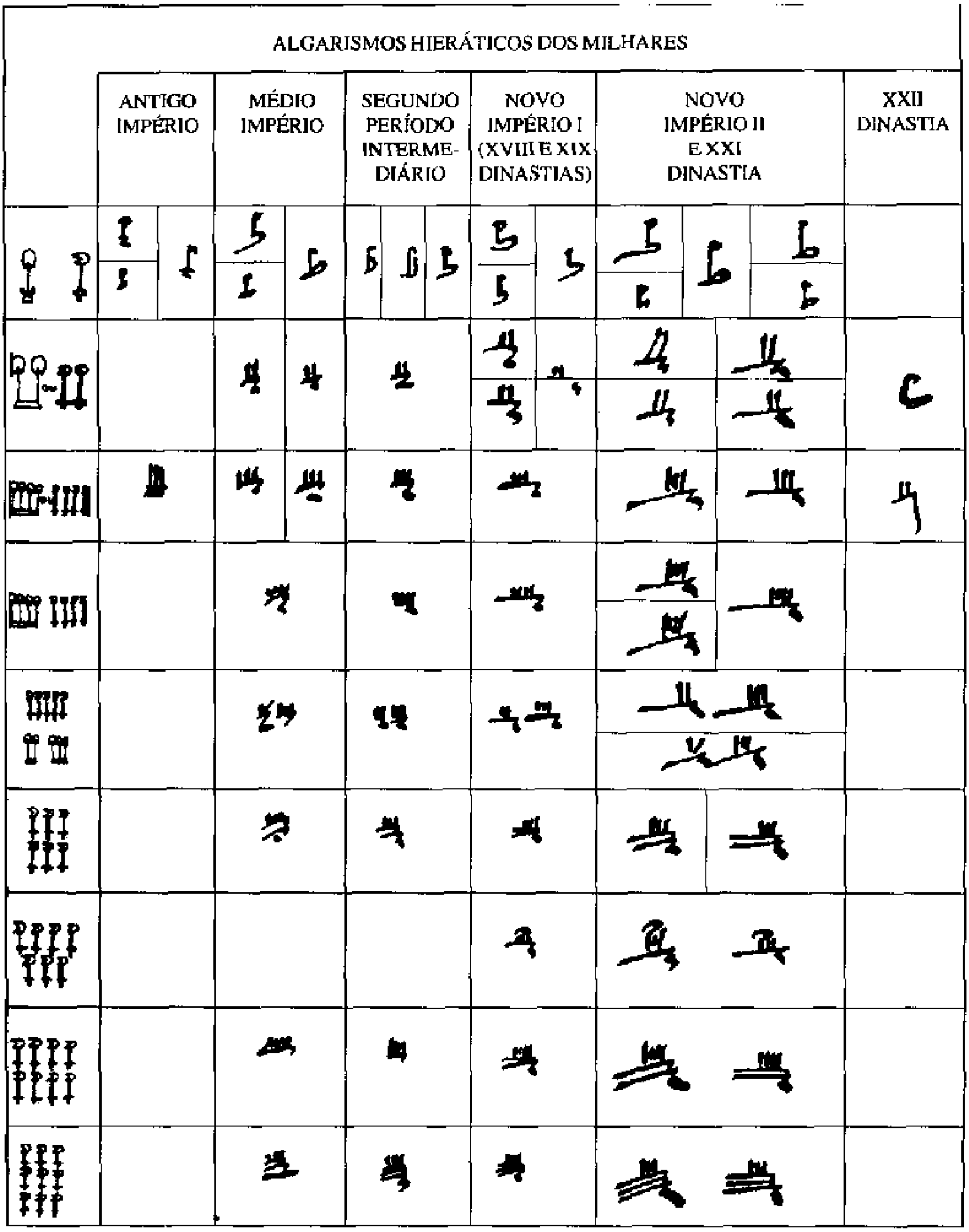
FONTE: Ifrah, 1997, p. 361

FIGURA 33: ALGARISMOS HIERÁTICOS DAS CENTENAS



FONTE: Ifrah, 1997, p. 362

FIGURA 34: ALGARISMOS HIERÁTICOS DOS MILHARES



FONTE: Ifrah, 1997, p. 363